

\$SPAD/input schaum28.input

Timothy Daly

June 15, 2008

## Contents

1	[1]:14.562	$\int \cosh ax \, dx$	3
2	[1]:14.563	$\int x \cosh ax \, dx$	4
3	[1]:14.564	$\int x^2 \cosh ax \, dx$	5
4	[1]:14.565	$\int \frac{\cosh ax}{x} \, dx$	6
5	[1]:14.566	$\int \frac{\cosh ax}{x^2} \, dx$	6
6	[1]:14.567	$\int \frac{dx}{\cosh ax}$	7
7	[1]:14.568	$\int \frac{x \, dx}{\cosh ax}$	8
8	[1]:14.569	$\int \cosh^2 ax \, dx$	9
9	[1]:14.570	$\int x \cosh^2 ax \, dx$	10
10	[1]:14.571	$\int \frac{dx}{\cosh^2 ax}$	13
11	[1]:14.572	$\int \cosh ax \cosh px \, dx$	15
12	[1]:14.573	$\int \cosh ax \sin px \, dx$	18
13	[1]:14.574	$\int \cosh ax \cos px \, dx$	20
14	[1]:14.575	$\int \frac{dx}{\cosh ax + 1}$	22
15	[1]:14.576	$\int \frac{dx}{\cosh ax - 1}$	25
16	[1]:14.577	$\int \frac{x \, dx}{\cosh ax + 1}$	28

17 [1]:14.578	$\int \frac{x dx}{\cosh ax - 1}$	33
18 [1]:14.579	$\int \frac{dx}{(\cosh ax + 1)^2}$	38
19 [1]:14.580	$\int \frac{dx}{(\cosh ax - 1)^2}$	40
20 [1]:14.581	$\int \frac{dx}{p + q \cosh ax}$	42
21 [1]:14.582	$\int \frac{dx}{(p + q \cosh ax)^2} dx$	47
22 [1]:14.583	$\int \frac{dx}{p^2 - q^2 \cosh^2 ax}$	58
23 [1]:14.584	$\int \frac{dx}{p^2 + q^2 \cosh^2 ax}$	65
24 [1]:14.585	$\int x^m \cosh ax dx$	69
25 [1]:14.586	$\int \cosh^n ax dx$	70
26 [1]:14.587	$\int \frac{\cosh ax}{x^n} dx$	70
27 [1]:14.588	$\int \frac{dx}{\cosh^n ax} dx$	71
28 [1]:14.589	$\int \frac{x}{\cosh^n ax} dx$	71

1 [1]:14.562  $\int \cosh ax \, dx$

$$\int \cosh ax = \frac{\sinh ax}{a}$$

```

(*)≡
)spool schaum28.output
)set message test on
)set message auto off
)clear all

--S 1
aa:=integrate(cosh(a*x),x)
--R
--R
--R      sinh(a x)
--R (1)  -----
--R      a
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

--S 2
bb:=sinh(a*x)/a
--R
--R      sinh(a x)
--R (2)  -----
--R      a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

--S 3      14:562 Schaums and Axiom agree
cc:=aa-bb
--R
--R (3)  0
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

2 [1]:14.563  $\int x \cosh ax \, dx$

$$\int x \cosh ax = \frac{x \sinh ax}{a} - \frac{\cosh ax}{a^2}$$

```
(*)+≡
)clear all
```

```
--S 4
aa:=integrate(x*cosh(a*x),x)
```

```
--R
--R
--R      a x sinh(a x) - cosh(a x)
--R (1) -----
--R              2
--R             a
```

Type: Union(Expression Integer,...)

```
--E
```

```
--S 5
bb:=(x*sinh(a*x))/a-cosh(a*x)/a^2
```

```
--R
--R      a x sinh(a x) - cosh(a x)
--R (2) -----
--R              2
--R             a
```

Type: Expression Integer

```
--E
```

```
--S 6      14:563 Schaums and Axiom agree
```

```
cc:=aa-bb
```

```
--R
--R (3)  0
```

Type: Expression Integer

```
--R
--E
```

3 [1]:14.564  $\int x^2 \cosh ax \, dx$

$$\int x^2 \cosh ax = -\frac{2x \cosh ax}{a^2} + \left(\frac{x^2}{a} + \frac{2}{a^3}\right) \sinh ax$$

```

(*)+≡
)clear all

--S 7
aa:=integrate(x^2*cosh(a*x),x)
--R
--R
--R      2 2
--R      (a x  + 2)sinh(a x) - 2a x cosh(a x)
--R (1) -----
--R                                 3
--R                                 a
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

--S 8
bb:=- (2*x*cosh(a*x))/a^2+(x^2/a+2/a^3)*sinh(a*x)
--R
--R      2 2
--R      (a x  + 2)sinh(a x) - 2a x cosh(a x)
--R (2) -----
--R                                 3
--R                                 a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

--S 9      14:564 Schaums and Axiom agree
cc:=aa-bb
--R
--R (3)  0
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

4 [1]:14.565  $\int \frac{\cosh ax}{x} dx$

$$\int \frac{\cosh ax}{x} = \ln x + \frac{(ax)^2}{2 \cdot 2!} + \frac{(ax)^4}{4 \cdot 4!} + \frac{(ax)^6}{6 \cdot 6!} + \dots$$

<\*>+≡  
)clear all

--S 10 14:565 Axiom cannot compute this integral

aa:=integrate(cosh(a\*x)/x,x)

--R

--R

--R

--I (1)  $\int \frac{\cosh(\%N a)}{\%N} d\%N$

--R

--R

--E

Type: Union(Expression Integer,...)

5 [1]:14.566  $\int \frac{\cosh ax}{x^2} dx$

$$\int \frac{\cosh ax}{x^2} = -\frac{\cosh ax}{x} + a \int \frac{\sinh ax}{a}$$

<\*>+≡  
)clear all

--S 11 14:566 Axiom cannot compute this integral

aa:=integrate(cosh(a\*x)/x^2,x)

--R

--R

--R

--I (1)  $\int \frac{\cosh(\%N a)}{\%N^2} d\%N$

--R

--R

--E

Type: Union(Expression Integer,...)

6 [1]:14.567  $\int \frac{dx}{\cosh ax} dx$

$$\int \frac{1}{\cosh ax} = \frac{2}{a} \tan^{-1} e^{ax}$$

```

(*)+≡
)clear all

--S 12
aa:=integrate(1/cosh(a*x),x)
--R
--R
--R      2atan(sinh(a x) + cosh(a x))
--R (1) -----
--R                                 a
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

--S 13
bb:=2/a*atan(%e^(a*x))
--R
--R      a x
--R      2atan(%e )
--R (2) -----
--R             a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

--S 14
cc:=aa-bb
--R
--R      a x
--R      2atan(sinh(a x) + cosh(a x)) - 2atan(%e )
--R (3) -----
--R                                 a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

--S 15      14:567 Schaums and Axiom agree
dd:=complexNormalize cc
--R
--R (4)  0
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```



7 [1]:14.568  $\int \frac{x dx}{\cosh ax}$

$$\int \frac{x}{\cosh ax} = \frac{1}{a^2} \left\{ \frac{(ax)^2}{2} - \frac{(ax)^4}{8} + \frac{5(ax)^6}{144} + \dots + \frac{(-1)^n E_n (ax)^{2n+2}}{(2n+2)(2n)!} + \dots \right\}$$

<\*)+≡

)clear all

--S 16 14:568 Axiom cannot compute this integral

aa:=integrate(x/cosh(a\*x),x)

--R

--R

--R

--I

--I

--I

--R

--E

$$(1) \quad \int \frac{x}{\cosh(a x)} dx$$

Type: Union(Expression Integer,...)

8 [1]:14.569  $\int \cosh^2 ax \, dx$

$$\int \cosh^2 ax = \frac{x}{2} + \frac{\sinh ax \cosh ax}{2a}$$

Note that the Schaums print edition (1968 printing 3) has a typo:

$$\int \cosh^2 ax = \frac{x}{2} + \frac{\sinh ax \cosh ax}{2}$$

```

(*)+≡
)clear all

--S 17
aa:=integrate(cosh(a*x)^2,x)
--R
--R
--R      cosh(a x)sinh(a x) + a x
--R (1)  -----
--R                      2a
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

--S 18
bb:=x/2+(sinh(a*x)*cosh(a*x))/(2*a)
--R
--R      cosh(a x)sinh(a x) + a x
--R (2)  -----
--R                      2a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

--S 19      14:569 Schaums and Axiom agree
cc:=aa-bb
--R
--R (3)  0
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

9 [1]:14.570  $\int x \cosh^2 ax \, dx$

$$\int x \cosh^2 ax = \frac{x^2}{4} + \frac{x \sinh 2ax}{4a} - \frac{\cosh 2ax}{8a^2}$$

```

(*)+=
)clear all

--S 20
aa:=integrate(x*cosh(a*x)^2,x)
--R
--R
--R
--R          2
--R      - sinh(a x)  + 4a x cosh(a x)sinh(a x) - cosh(a x)  + 2a x
--R (1) -----
--R                                     2
--R                                    8a
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

--S 21
bb:=x^2/4+(x*sinh(2*a*x))/(4*a)-cosh(2*a*x)/(8*a^2)
--R
--R
--R
--R          2 2
--R      2a x sinh(2a x) - cosh(2a x) + 2a x
--R (2) -----
--R          2
--R         8a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

--S 22
cc:=aa-bb
--R
--R
--R (3)
--R
--R          2
--R      - 2a x sinh(2a x) - sinh(a x)  + 4a x cosh(a x)sinh(a x) + cosh(2a x)
--R +
--R          2
--R      - cosh(a x)
--R /
--R
--R          2
--R      8a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 23
sinhsqrrule:=rule(sinh(x)^2 == 1/2*cosh(2*x)-1/2)
--R
--R          2    cosh(2x) - 1
--R (4)  sinh(x) == -----
--R                    2
--R                                     Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

```

```

--S 24
dd:=sinhsqrrule cc
--R
--R (5)
--R
--R          2
--R - 4a x sinh(2a x) + 8a x cosh(a x)sinh(a x) + cosh(2a x) - 2cosh(a x) + 1
--R -----
--R                                     2
--R                                  16a
--R                                     Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 25
coshsqrrule:=rule(cosh(x)^2 == 1/2*cosh(2*x)+1/2)
--R
--R          2    cosh(2x) + 1
--R (6)  cosh(x) == -----
--R                    2
--R                                     Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

```

```

--S 26
ee:=coshsqrrule dd
--R
--R          - x sinh(2a x) + 2x cosh(a x)sinh(a x)
--R (7) -----
--R                    4a
--R                                     Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 27
sinhcoshrule:=rule(sinh(x)*cosh(y) == 1/2*(sinh(x+y)+sinh(x-y)))
--R
--R          %S sinh(y + x) - %S sinh(y - x)
--R (8)  %S cosh(y)sinh(x) == -----
--R                                     2
--R                                     Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)

```

--E

--S 28 14:570 Schaums and Axiom agree

ff:=sinhcoshrule ee

--R

--R (9) 0

--R

Type: Expression Integer

--E

10 [1]:14.571  $\int \frac{dx}{\cosh^2 ax} dx$

$$\int \frac{1}{\cosh^2 ax} = \frac{\tanh ax}{a}$$

```
(*)+=
)clear all
```

```
--S 29
aa:=integrate(1/cosh(a*x)^2,x)
--R
--R
--R
--R (1) -----
--R              2
--R      a sinh(a x)  + 2a cosh(a x)sinh(a x) + a cosh(a x)  + a
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E
```

```
--S 30
bb:=tanh(a*x)/a
--R
--R      tanh(a x)
--R (2) -----
--R              a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E
```

```
--S 31
cc:=aa-bb
--R
--R
--R              2
--R      (- sinh(a x)  - 2cosh(a x)sinh(a x) - cosh(a x)  - 1)tanh(a x) - 2
--R (3) -----
--R              2
--R      a sinh(a x)  + 2a cosh(a x)sinh(a x) + a cosh(a x)  + a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E
```

```
--S 32      14:571 Schaums and Axiom differ by a constant
dd:=complexNormalize cc
--R
--R      1
--R (4) - -
--R      a
```

--R  
--E

Type: Expression Integer

11 [1]:14.572  $\int \cosh ax \cosh px \, dx$

$$\int \cosh ax \cosh px = \frac{\sinh(a-p)x}{2(a-p)} + \frac{\sinh(a+p)x}{2(a+p)}$$

```

(*)+=
)clear all

--S 33
aa:=integrate(cosh(a*x)*cosh(p*x),x)
--R
--R
--R      - p cosh(a x)sinh(p x) + a cosh(p x)sinh(a x)
--R (1) -----
--R      2      2      2      2      2      2
--R      (p - a )sinh(a x) + (- p + a )cosh(a x)
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

--S 34
bb:=(sinh(a-p)*x)/(2*(a-p))+sinh(a+p)*x/(2*(a+p))
--R
--R      (p - a)x sinh(p + a) + (p + a)x sinh(p - a)
--R (2) -----
--R      2      2
--R      2p - 2a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

--S 35
cc:=aa-bb
--R
--R (3)
--R      - 2p cosh(a x)sinh(p x)
--R      +
--R      ((- p + a)x sinh(p + a) + (- p - a)x sinh(p - a))sinh(a x)2
--R      +
--R      2a cosh(p x)sinh(a x) + (p - a)x cosh(a x) sinh(p + a)2
--R      +
--R      (p + a)x cosh(a x) sinh(p - a)2
--R      /
--R      2      2      2      2      2      2
--R      (2p - 2a )sinh(a x) + (- 2p + 2a )cosh(a x)

```



--R Type: Expression Integer  
 --E

--S 36  
 sinhsqrrule:=rule(sinh(x)^2 == 1/2\*cosh(2\*x)-1/2)

--R  
 --R (4)  $\sinh(x)^2 == \frac{\cosh(2x) - 1}{2}$   
 --R Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)  
 --E

--S 37  
 dd:=sinhsqrrule cc

--R (5)  
 --R  $-4p \cosh(ax)\sinh(px) + 4a \cosh(px)\sinh(ax)$   
 --R +  
 --R  $\frac{((-p+a)x \cosh(2ax) + (2p-2a)x \cosh(ax))^2 + (p-a)x \sinh(p+a)}{((p-a)x \cosh(2ax) + (2p+2a)x \cosh(ax))^2 + (p+a)x \sinh(p-a)}$   
 --R /  
 --R  $\frac{(2p^2 - 2a^2) \cosh(2ax) + (-4p^2 + 4a^2) \cosh(ax) - 2p^2 + 2a^2}{\text{Type: Expression Integer}}$   
 --E

--S 38  
 coshsqrrule:=rule(cosh(x)^2 == 1/2\*cosh(2\*x)+1/2)

--R  
 --R (6)  $\cosh(x)^2 == \frac{\cosh(2x) + 1}{2}$   
 --R Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)  
 --E

--S 39  
 ee:=coshsqrrule dd

--R (7)  
 --R  $2p \cosh(ax)\sinh(px) - 2a \cosh(px)\sinh(ax) + (-p+a)x \sinh(p+a)$   
 --R +  
 --R  $(-p-a)x \sinh(p-a)$   
 --R /

```

--R      2      2
--R      2p  - 2a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 40
sinhcoshrule:=rule(sinh(x)*cosh(y) == 1/2*(sinh(x+y)+sinh(x-y)))
--R
--R                                          %V sinh(y + x) - %V sinh(y - x)
--I (8) %V cosh(y)sinh(x) == -----
--R                                          2
--R
--R                                          Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

```

```

--S 41      14:572 Axiom cannot simplify this expression
ff:=sinhcoshrule ee
--R
--R (9)
--R      (p - a)sinh((p + a)x) + (p + a)sinh((p - a)x) + (- p + a)x sinh(p + a)
--R      +
--R      (- p - a)x sinh(p - a)
--R      /
--R      2      2
--R      2p  - 2a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

12 [1]:14.573  $\int \cosh ax \sin px \, dx$

$$\int \cosh ax \sin px = \frac{a \sinh ax \sin px - p \cosh ax \cos px}{a^2 + p^2}$$

```

(*)+≡
)clear all

--S 42
aa:=integrate(cosh(a*x)*sin(p*x),x)
--R
--R
--R (1)
--R
--R      2
--R      (a sin(p x) - p cos(p x))sinh(a x)
--R      +
--R      (2a cosh(a x)sin(p x) - 2p cos(p x)cosh(a x))sinh(a x)
--R      +
--R      2
--R      (a cosh(a x) - a)sin(p x) - p cos(p x)cosh(a x) - p cos(p x)
--R      /
--R      2 2
--R      (2p + 2a )sinh(a x) + (2p + 2a )cosh(a x)
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

--S 43
bb:=(a*sinh(a*x)*sin(p*x)-p*cosh(a*x)*cos(p*x))/(a^2+p^2)
--R
--R
--R      a sin(p x)sinh(a x) - p cos(p x)cosh(a x)
--R (2) -----
--R
--R      2 2
--R      p + a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

--S 44
cc:=aa-bb
--R
--R (3)
--R
--R      2
--R      (- a sin(p x) - p cos(p x))sinh(a x) + (a cosh(a x) - a)sin(p x)
--R      +
--R      2
--R      p cos(p x)cosh(a x) - p cos(p x)
--R      /

```

```

--R      2      2      2      2
--R      (2p  + 2a )sinh(a x) + (2p  + 2a )cosh(a x)
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 45
coshsqrrule:=rule(cosh(x)^2 == 1/2*cosh(2*x)+1/2)
--R
--R      2      cosh(2x) + 1
--R      (4)  cosh(x) == -----
--R                      2
--R
--R                                          Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

```

```

--S 46
dd:=coshsqrrule cc
--R
--R      (5)
--R
--R      2
--R      (- 2a sin(p x) - 2p cos(p x))sinh(a x)  + (a cosh(2a x) - a)sin(p x)
--R      +
--R      p cos(p x)cosh(2a x) - p cos(p x)
--R      /
--R      2      2      2      2
--R      (4p  + 4a )sinh(a x) + (4p  + 4a )cosh(a x)
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 47
sinhsqrrule:=rule(sinh(x)^2 == 1/2*cosh(2*x)-1/2)
--R
--R      2      cosh(2x) - 1
--R      (6)  sinh(x) == -----
--R                      2
--R
--R                                          Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

```

```

--S 48      14:573 Schaums and Axiom agree
ee:=sinhsqrrule dd
--R
--R      (7)  0
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

13 [1]:14.574  $\int \cosh ax \cos px \, dx$

$$\int \cosh ax \cos px = \frac{a \sinh ax \cos px + p \cosh ax \sin px}{a^2 + p^2}$$

`<*>+≡  
)clear all`

```
--S 49
aa:=integrate(cosh(a*x)*cos(p*x),x)
--R
--R
--R (1)
--R
--R      2
--R      (p sin(p x) + a cos(p x))sinh(a x)
--R      +
--R      (2p cosh(a x)sin(p x) + 2a cos(p x)cosh(a x))sinh(a x)
--R      +
--R      2
--R      (p cosh(a x) + p)sin(p x) + a cos(p x)cosh(a x) - a cos(p x)
--R      /
--R      2      2
--R      (2p + 2a )sinh(a x) + (2p + 2a )cosh(a x)
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E
```

```
--S 50
bb:=(a*sinh(a*x)*cos(p*x)+p*cosh(a*x)*sin(p*x))/(a^2+p^2)
--R
--R
--R      a cos(p x)sinh(a x) + p cosh(a x)sin(p x)
--R (2) -----
--R
--R      2      2
--R      p + a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E
```

```
--S 51
cc:=aa-bb
--R
--R (3)
--R
--R      2
--R      (p sin(p x) - a cos(p x))sinh(a x) + (- p cosh(a x) + p)sin(p x)
--R      +
--R      2
--R      a cos(p x)cosh(a x) - a cos(p x)
--R      /
```

```

--R      2      2      2      2
--R      (2p  + 2a )sinh(a x) + (2p  + 2a )cosh(a x)
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 52
coshsqrrule:=rule(cosh(x)^2 == 1/2*cosh(2*x)+1/2)
--R
--R      2      cosh(2x) + 1
--R      (4)  cosh(x) == -----
--R                      2
--R
--R                                          Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

```

```

--S 53
dd:=coshsqrrule cc
--R
--R      (5)
--R
--R      2
--R      (2p sin(p x) - 2a cos(p x))sinh(a x) + (- p cosh(2a x) + p)sin(p x)
--R      +
--R      a cos(p x)cosh(2a x) - a cos(p x)
--R      /
--R      2      2      2      2
--R      (4p  + 4a )sinh(a x) + (4p  + 4a )cosh(a x)
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 54
sinhsqrrule:=rule(sinh(x)^2 == 1/2*cosh(2*x)-1/2)
--R
--R      2      cosh(2x) - 1
--R      (6)  sinh(x) == -----
--R                      2
--R
--R                                          Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

```

```

--S 55      14:574 Schaums and Axiom agree
ee:=sinhsqrrule dd
--R
--R      (7)  0
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

14 [1]:14.575  $\int \frac{dx}{\cosh ax + 1}$

$$\int \frac{1}{\cosh ax + 1} = \frac{1}{a} \tanh \frac{ax}{2}$$

```
(*)+=
)clear all
```

```
--S 56
aa:=integrate(1/(cosh(a*x)+1),x)
--R
--R
--R
--R      2
--R (1)  -----
--R      a sinh(a x) + a cosh(a x) + a
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E
```

```
--S 57
bb:=1/a*tanh((a*x)/2)
--R
--R      a x
--R      tanh(---)
--R      2
--R (2)  -----
--R      a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E
```

```
--S 58
cc:=aa-bb
--R
--R
--R      a x
--R      (- sinh(a x) - cosh(a x) - 1)tanh(---) - 2
--R      2
--R (3)  -----
--R      a sinh(a x) + a cosh(a x) + a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E
```

```
--S 59
tanhrule:=rule(tanh(x) == sinh(x)/cosh(x))
--R
--R      sinh(x)
--R (4)  tanh(x) == -----
--R
```

```

--R          cosh(x)
--R          Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

```

```

--S 60
dd:=tanhrule cc

```

```

--R
--R          a x          a x          a x
--R      - sinh(---)sinh(a x) + (- cosh(a x) - 1)sinh(---) - 2cosh(---)
--R          2          2          2
--R      (5) -----
--R          a x          a x          a x
--R      a cosh(---)sinh(a x) + a cosh(---)cosh(a x) + a cosh(---)
--R          2          2          2
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 61
sinhcoshrule:=rule(sinh(x)*cosh(y) == 1/2*(sinh(x+y)+sinh(x-y)))

```

```

--R
--R          %BC sinh(y + x) - %BC sinh(y - x)
--R      (6) %BC cosh(y)sinh(x) == -----
--R                                  2
--R          Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

```

```

--S 62
ee:=sinhcoshrule dd

```

```

--R
--R          3a x          a x          a x          a x
--R      - sinh(----) - 2sinh(---)sinh(a x) - sinh(---) - 4cosh(---)
--R          2          2          2          2
--R      (7) -----
--R          3a x          a x          a x          a x
--R      a sinh(----) + a sinh(---) + 2a cosh(---)cosh(a x) + 2a cosh(---)
--R          2          2          2          2
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 63
sinhsinhrule:=rule(sinh(x)*sinh(y)==1/2*(cosh(x+y)-cosh(x-y)))

```

```

--R
--R          %BD sinh(y + x) - %BD sinh(y - x)
--R      (8) %BD cosh(y)sinh(x) == -----
--R                                  2
--R          Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)

```



--E

--S 64

ff:=sinhsinhrule ee

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--E

--S 65

coshcoshrule:=rule(cosh(x)\*cosh(y)==1/2\*(cosh(x+y)+cosh(x-y)))

--R

--I

--I

--R

--R

--R

--E

--S 66 14:575 Schaums and Axiom differ by a constant

gg:=coshcoshrule ff

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--E

$$(9) \frac{-\sinh\left(\frac{3ax}{2}\right) - \sinh\left(\frac{ax}{2}\right) - \cosh\left(\frac{3ax}{2}\right) - 3\cosh\left(\frac{ax}{2}\right)}{a \sinh\left(\frac{3ax}{2}\right) + a \sinh\left(\frac{ax}{2}\right) + 2a \cosh\left(\frac{ax}{2}\right)\cosh(ax) + 2a \cosh\left(\frac{ax}{2}\right)}$$

Type: Expression Integer

$$(10) \quad \%BC \cosh(x)\cosh(y) == \frac{\%BC \cosh(y + x) + \%BC \cosh(y - x)}{2}$$

Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)

$$(11) \quad - \frac{1}{a}$$

Type: Expression Integer

15 [1]:14.576  $\int \frac{dx}{\cosh ax - 1}$

$$\int \frac{1}{\cosh ax - 1} = -\frac{1}{a} \coth \frac{ax}{2}$$

```
(*)+=
)clear all
```

```
--S 67
aa:=integrate(1/(cosh(a*x)-1),x)
--R
--R
--R
--R      2
--R (1)  - ----
--R      a sinh(a x) + a cosh(a x) - a
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E
```

```
--S 68
bb:=-1/a*coth((a*x)/2)
--R
--R
--R      a x
--R      coth(---)
--R      2
--R (2)  - ----
--R      a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E
```

```
--S 69
cc:=aa-bb
--R
--R
--R      a x
--R      coth(---)sinh(a x) + (cosh(a x) - 1)coth(---) - 2
--R      2
--R (3)  -----
--R      a sinh(a x) + a cosh(a x) - a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E
```

```
--S 70
cothrule:=rule(coth(x) == cosh(x)/sinh(x))
--R
--R
--R      cosh(x)
--R (4)  coth(x) == -----
--R
```

```

--R          sinh(x)
--R          Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

```

```

--S 71
dd:=cothrule cc

```

```

--R
--R          a x          a x          a x          a x
--R      cosh(---)sinh(a x) - 2sinh(---) + cosh(---)cosh(a x) - cosh(---)
--R          2              2              2              2
--R      (5) -----
--R          a x          a x
--R      a sinh(---)sinh(a x) + (a cosh(a x) - a)sinh(---)
--R          2              2
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 72
sinhcoshrule:=rule(sinh(x)*cosh(y) == 1/2*(sinh(x+y)+sinh(x-y)))

```

```

--R
--R          %BD sinh(y + x) - %BD sinh(y - x)
--R      (6) %BD cosh(y)sinh(x) == -----
--R                                  2
--R          Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

```

```

--S 73
ee:=sinhcoshrule dd

```

```

--R
--R          3a x          a x          a x          a x
--R      sinh(----) - 3sinh(---) + 2cosh(---)cosh(a x) - 2cosh(---)
--R          2              2              2              2
--R      (7) -----
--R          3a x          a x          a x
--R      a sinh(----) + 2a sinh(---)sinh(a x) - 3a sinh(---)
--R          2              2              2
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 74
sinhsinhrule:=rule(sinh(x)*sinh(y)==1/2*(cosh(x+y)-cosh(x-y)))

```

```

--R
--R          %BE cosh(y + x) - %BE cosh(y - x)
--R      (8) %BE sinh(x)sinh(y) == -----
--R                                  2
--R          Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)

```

--E

--S 75

ff:=sinhsinhrule ee

--R

$$\sinh\left(\frac{3ax}{2}\right) - 3\sinh\left(\frac{ax}{2}\right) + 2\cosh\left(\frac{ax}{2}\right)\cosh(ax) - 2\cosh\left(\frac{ax}{2}\right)$$

--R (9)

$$a\sinh\left(\frac{3ax}{2}\right) - 3a\sinh\left(\frac{ax}{2}\right) + a\cosh\left(\frac{3ax}{2}\right) - a\cosh\left(\frac{ax}{2}\right)$$

Type: Expression Integer

--E

--S 76

coshcoshrule:=rule(cosh(x)\*cosh(y)==1/2\*(cosh(x+y)+cosh(x-y)))

--R

$$(10) \quad \cosh(x)\cosh(y) == \frac{\cosh(y+x) + \cosh(y-x)}{2}$$

Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)

--E

--S 77 14:576 Schaums and Axiom differ by a constant

gg:=coshcoshrule ff

--R

$$(11) \quad \frac{1}{a}$$

Type: Expression Integer

--E

16 [1]:14.577  $\int \frac{x dx}{\cosh ax + 1} dx$

$$\int \frac{x}{\cosh ax + 1} = \frac{x}{a} \tanh \frac{ax}{2} - \frac{2}{a^2} \ln \cosh \frac{ax}{2}$$

```

(*)+=
)clear all

--S 78
aa:=integrate(x/(cosh(a*x)+1),x)
--R
--R
--R (1)
--R      (- 2sinh(a x) - 2cosh(a x) - 2)log(sinh(a x) + cosh(a x) + 1)
--R      +
--R      2a x sinh(a x) + 2a x cosh(a x)
--R      /
--R      2      2      2
--R      a sinh(a x) + a cosh(a x) + a
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

--S 79
bb:=x/a*tanh((a*x)/2)-2/a^2*log(cosh((a*x)/2))
--R
--R
--R      a x      a x
--R      - 2log(cosh(---)) + a x tanh(---)
--R      2      2
--R (2) -----
--R      2
--R      a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

--S 80
cc:=aa-bb
--R
--R (3)
--R      (- 2sinh(a x) - 2cosh(a x) - 2)log(sinh(a x) + cosh(a x) + 1)
--R      +
--R      (2sinh(a x) + 2cosh(a x) + 2)log(cosh(---))
--R      2
--R      +
--R      a x

```

```

--R      (- a x sinh(a x) - a x cosh(a x) - a x)tanh(---) + 2a x sinh(a x)
--R                                         2
--R      +
--R      2a x cosh(a x)
--R      /
--R      2      2      2
--R      a sinh(a x) + a cosh(a x) + a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 81
tanhrule:=rule(tanh(x) == sinh(x)/cosh(x))
--R
--R      sinh(x)
--R      (4) tanh(x) == -----
--R      cosh(x)
--R
--R                                          Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

```

```

--S 82
dd:=tanhrule cc
--R
--R      (5)
--R      a x      a x      a x
--R      (- 2cosh(---)sinh(a x) - 2cosh(---)cosh(a x) - 2cosh(---))
--R      2      2      2
--R      *
--R      log(sinh(a x) + cosh(a x) + 1)
--R      +
--R      a x      a x      a x      a x
--R      (2cosh(---)sinh(a x) + 2cosh(---)cosh(a x) + 2cosh(---))log(cosh(---))
--R      2      2      2      2
--R      +
--R      a x      a x
--R      (- a x sinh(---) + 2a x cosh(---))sinh(a x)
--R      2      2
--R      +
--R      a x      a x
--R      (- a x cosh(a x) - a x)sinh(---) + 2a x cosh(---)cosh(a x)
--R      2      2
--R      /
--R      2      a x      2      a x      2      a x
--R      a cosh(---)sinh(a x) + a cosh(---)cosh(a x) + a cosh(---)
--R      2      2      2
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 83
coshcoshrule:=rule(cosh(x)*cosh(y)==1/2*(cosh(x+y)+cosh(x-y)))
--R
--I
--R          %BG cosh(y + x) + %BG cosh(y - x)
--I (6) %BG cosh(x)cosh(y) == -----
--R                                  2
--R
--R          Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

```

```

--S 84
ee:=coshcoshrule dd
--R
--R (7)
--R          a x          3a x          a x
--R      (- 4cosh(---)sinh(a x) - 2cosh(----) - 6cosh(---))
--R          2          2          2
--R
--R      *
--R      log(sinh(a x) + cosh(a x) + 1)
--R
--R      +
--R          a x          3a x          a x          a x
--R      (4cosh(---)sinh(a x) + 2cosh(----) + 6cosh(---))log(cosh(---))
--R          2          2          2          2
--R
--R      +
--R          a x          a x
--R      (- 2a x sinh(---) + 4a x cosh(---))sinh(a x)
--R          2          2
--R
--R      +
--R          a x          3a x          a x
--R      (- 2a x cosh(a x) - 2a x)sinh(---) + 2a x cosh(----) + 2a x cosh(---)
--R          2          2          2
--R
--R      /
--R          2          a x          2          3a x          2          a x
--R      2a cosh(---)sinh(a x) + a cosh(----) + 3a cosh(---)
--R          2          2          2
--R
--R          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 85
sinhcoshrule:=rule(sinh(x)*cosh(y) == 1/2*(sinh(x+y)+sinh(x-y)))
--R
--I
--R          %BH sinh(y + x) - %BH sinh(y - x)
--I (8) %BH cosh(y)sinh(x) == -----
--R                                  2
--R
--R          Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

```

```

--S 86
ff:=sinhcoshrule ee
--R
--R (9)
--R      3a x      a x      3a x      a x
--R      (- 2sinh(----) - 2sinh(----) - 2cosh(----) - 6cosh(----))
--R              2          2          2          2
--R      *
--R      log(sinh(a x) + cosh(a x) + 1)
--R      +
--R      3a x      a x      3a x      a x      a x
--R      (2sinh(----) + 2sinh(----) + 2cosh(----) + 6cosh(----))log(cosh(----))
--R              2          2          2          2          2
--R      +
--R      3a x      a x      a x
--R      a x sinh(----) - 2a x sinh(----)sinh(a x) + a x sinh(----)
--R              2          2          2
--R      +
--R      3a x      a x
--R      2a x cosh(----) + 2a x cosh(----)
--R              2          2
--R      /
--R      2      3a x      2      a x      2      3a x      2      a x
--R      a sinh(----) + a sinh(----) + a cosh(----) + 3a cosh(----)
--R              2          2          2          2
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 87
sinhsinhrule:=rule(sinh(x)*sinh(y)==1/2*(cosh(x+y)-cosh(x-y)))
--R
--R
--R      %BI cosh(y + x) - %BI cosh(y - x)
--R      (10) %BI sinh(x)sinh(y) == -----
--R                                  2
--R
--R      Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

```

```

--S 88
gg:=sinhsinhrule ff
--R
--R
--R      a x
--R      - 2log(sinh(a x) + cosh(a x) + 1) + 2log(cosh(----)) + a x
--R                                  2
--R      (11) -----
--R                                  2

```



```
--R          a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E
```

```
--S 89      14:577 Schaums and Axiom differ by a constant
complexNormalize gg
```

```
--R
--R          2log(2)
--R (12)  - ----
--R          2
--R          a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E
```

17 [1]:14.578  $\int \frac{x dx}{\cosh ax - 1}$

$$\int \frac{x}{\cosh ax - 1} - \frac{x}{a} \coth \frac{ax}{2} + \frac{2}{a^2} \ln \sinh \frac{ax}{2}$$

```

(*)+≡
)clear all

--S 90
aa:=integrate(x/(cosh(a*x)-1),x)
--R
--R
--R (1)
--R      (2sinh(a x) + 2cosh(a x) - 2)log(sinh(a x) + cosh(a x) - 1)
--R      +
--R      - 2a x sinh(a x) - 2a x cosh(a x)
--R      /
--R      2      2      2
--R      a sinh(a x) + a cosh(a x) - a
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

--S 91
bb:=-x/a*coth((a*x)/2)+2/a^2*log(sinh((a*x)/2))
--R
--R
--R      a x      a x
--R      2log(sinh(---)) - a x coth(---)
--R      2      2
--R (2) -----
--R      2
--R      a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

--S 92
cc:=aa-bb
--R
--R (3)
--R      (2sinh(a x) + 2cosh(a x) - 2)log(sinh(a x) + cosh(a x) - 1)
--R      +
--R      (- 2sinh(a x) - 2cosh(a x) + 2)log(sinh(---))
--R      2
--R      +
--R      a x      a x

```

```

--R      (a x coth(---) - 2a x)sinh(a x) + (a x cosh(a x) - a x)coth(---)
--R      2                                     2
--R      +
--R      - 2a x cosh(a x)
--R      /
--R      2          2          2
--R      a sinh(a x) + a cosh(a x) - a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 93
cothrule:=rule(coth(x) == cosh(x)/sinh(x))
--R
--R      cosh(x)
--R      (4) coth(x) == -----
--R      sinh(x)
--R
--R                                          Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

```

```

--S 94
dd:=cothrule cc
--R
--R      (5)
--R      a x          a x
--R      (2sinh(---)sinh(a x) + (2cosh(a x) - 2)sinh(---))
--R      2                                     2
--R      *
--R      log(sinh(a x) + cosh(a x) - 1)
--R      +
--R      a x          a x          a x          a x
--R      (- 2sinh(---)sinh(a x) + (- 2cosh(a x) + 2)sinh(---))log(sinh(---))
--R      2                                     2                                     2
--R      +
--R      a x          a x          a x
--R      (- 2a x sinh(---) + a x cosh(---))sinh(a x) - 2a x cosh(a x)sinh(---)
--R      2                                     2                                     2
--R      +
--R      a x          a x
--R      a x cosh(---)cosh(a x) - a x cosh(---)
--R      2                                     2
--R      /
--R      2          a x          2          2          a x
--R      a sinh(---)sinh(a x) + (a cosh(a x) - a )sinh(---)
--R      2                                     2
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 95
sinhcoshrule:=rule(sinh(x)*cosh(y) == 1/2*(sinh(x+y)+sinh(x-y)))
--R
--I
--R          %BJ sinh(y + x) - %BJ sinh(y - x)
--I (6) %BJ cosh(y)sinh(x) == -----
--R                                  2
--R
--R          Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

```

```

--S 96
ee:=sinhcoshrule dd
--R
--R (7)
--R          3a x      a x      a x
--R      (2sinh(----) + 4sinh(---)sinh(a x) - 6sinh(----))
--R              2          2          2
--R
--R      *
--R      log(sinh(a x) + cosh(a x) - 1)
--R
--R      +
--R          3a x      a x      a x      a x
--R      (- 2sinh(----) - 4sinh(---)sinh(a x) + 6sinh(----))log(sinh(---))
--R              2          2          2          2
--R
--R      +
--R          3a x      a x      a x
--R      - a x sinh(----) - 4a x sinh(---)sinh(a x) + 3a x sinh(---)
--R              2          2          2
--R
--R      +
--R          a x      a x
--R      2a x cosh(---)cosh(a x) - 2a x cosh(---)
--R              2          2
--R
--R      /
--R      2      3a x      2      a x      2      a x
--R      a sinh(----) + 2a sinh(---)sinh(a x) - 3a sinh(---)
--R              2          2          2
--R
--R          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 97
sinhsinhrule:=rule(sinh(x)*sinh(y)==1/2*(cosh(x+y)-cosh(x-y)))
--R
--I
--R          %BK cosh(y + x) - %BK cosh(y - x)
--I (8) %BK sinh(x)sinh(y) == -----
--R                                  2
--R
--R          Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

```

```

--S 98
ff:=sinhsinhrule ee
--R
--R (9)
--R      3a x      a x      3a x      a x
--R      (2sinh(----) - 6sinh(----) + 2cosh(----) - 2cosh(----))
--R      2          2          2          2
--R      *
--R      log(sinh(a x) + cosh(a x) - 1)
--R      +
--R      3a x      a x      3a x      a x      a x
--R      (- 2sinh(----) + 6sinh(----) - 2cosh(----) + 2cosh(----))log(sinh(----))
--R      2          2          2          2          2
--R      +
--R      3a x      a x      3a x
--R      - a x sinh(----) + 3a x sinh(----) - 2a x cosh(----)
--R      2          2          2
--R      +
--R      a x
--R      2a x cosh(----)cosh(a x)
--R      2
--R      /
--R      2      3a x      2      a x      2      3a x      2      a x
--R      a sinh(----) - 3a sinh(----) + a cosh(----) - a cosh(----)
--R      2          2          2          2
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 99
coshcoshrule:=rule(cosh(x)*cosh(y)==1/2*(cosh(x+y)+cosh(x-y)))
--R
--R
--R      %BL cosh(y + x) + %BL cosh(y - x)
--R (10) %BL cosh(x)cosh(y) == -----
--R                                  2
--R
--R      Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

```

```

--S 100
gg:=coshcoshrule ff
--R
--R
--R      a x
--R      2log(sinh(a x) + cosh(a x) - 1) - 2log(sinh(----)) - a x
--R      2
--R (11) -----
--R      2

```

```
--R          a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E
```

```
--S 101      14:578 Schaums and Axiom differ by a constant
hh:=complexNormalize gg
```

```
--R
--R          2log(2)
--R (12)  -----
--R          2
--R          a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E
```

18 [1]:14.579  $\int \frac{dx}{(\cosh ax + 1)^2}$

$$\int \frac{1}{(\cosh ax + 1)^2} = \frac{1}{2a} \tanh \frac{ax}{2} - \frac{1}{6a} \tanh^3 \frac{ax}{2}$$

(\*)+=  
)clear all

--S 102

aa:=integrate(1/(cosh(a\*x)+1)^2,x)

--R

--R

--R (1)

--R - 6sinh(a x) - 6cosh(a x) - 2

--R /

--R 
$$\frac{3a^3 \sinh^3(a x) + (9a^2 \cosh(a x) + 9a) \sinh^2(a x)}{9a^2 \cosh^2(a x) + 18a \cosh(a x) + 9a} + \frac{3a^3 \cosh^3(a x) + 3a^2 \cosh^2(a x) + 3a \cosh(a x)}{9a^2 \cosh^2(a x) + 9a \cosh(a x) + 3a}$$

--R +

--R 
$$\frac{9a^2 \cosh^2(a x) + 18a \cosh(a x) + 9a}{9a^2 \cosh^2(a x) + 9a \cosh(a x) + 3a} + \frac{3a^3 \cosh^3(a x) + 3a^2 \cosh^2(a x) + 3a \cosh(a x)}{9a^2 \cosh^2(a x) + 9a \cosh(a x) + 3a}$$

--R +

--R 
$$9a^2 \cosh^2(a x) + 9a \cosh(a x) + 3a$$

--R

Type: Union(Expression Integer,...)

--E

--S 103

bb:=1/(2\*a)\*tanh((a\*x)/2)-1/(6\*a)\*tanh((a\*x)/2)^3

--R

--R 
$$-\frac{a^3 x^3}{2} \tanh\left(\frac{ax}{2}\right) + \frac{3a^3 x}{2} \tanh^3\left(\frac{ax}{2}\right)$$

--R (2) -----

--R 
$$6a$$

--R

Type: Expression Integer

--E

--S 104 14:579 Axiom cannot compute this integral

cc:=aa-bb

--R

--R (3)

--R 
$$\frac{\sinh^3(a x) + (3 \cosh(a x) + 3) \sinh^2(a x)}{9a^2 \cosh^2(a x) + 18a \cosh(a x) + 9a} + \frac{3a^3 \cosh^3(a x) + 3a^2 \cosh^2(a x) + 3a \cosh(a x)}{9a^2 \cosh^2(a x) + 9a \cosh(a x) + 3a}$$

--R +

--R 
$$9a^2 \cosh^2(a x) + 9a \cosh(a x) + 3a$$

--R

3

2

```

--R      (3cosh(a x) + 6cosh(a x) + 3)sinh(a x) + cosh(a x) + 3cosh(a x)
--R      +
--R      3cosh(a x) + 1
--R      *
--R      a x 3
--R      tanh(---)
--R      2
--R      +
--R      3 2
--R      - 3sinh(a x) + (- 9cosh(a x) - 9)sinh(a x)
--R      +
--R      2 3
--R      (- 9cosh(a x) - 18cosh(a x) - 9)sinh(a x) - 3cosh(a x)
--R      +
--R      2
--R      - 9cosh(a x) - 9cosh(a x) - 3
--R      *
--R      a x
--R      tanh(---)
--R      2
--R      +
--R      - 12sinh(a x) - 12cosh(a x) - 4
--R      /
--R      3 2
--R      6a sinh(a x) + (18a cosh(a x) + 18a)sinh(a x)
--R      +
--R      2 3
--R      (18a cosh(a x) + 36a cosh(a x) + 18a)sinh(a x) + 6a cosh(a x)
--R      +
--R      2
--R      18a cosh(a x) + 18a cosh(a x) + 6a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```



19 [1]:14.580  $\int \frac{dx}{(\cosh ax - 1)^2}$

$$\int \frac{1}{(\cosh ax - 1)^2} = \frac{1}{2a} \coth \frac{ax}{2} - \frac{1}{6a} \coth^3 \frac{ax}{2}$$

```

(*)+=
)clear all

--S 105
aa:=integrate(1/(cosh(a*x)-1)^2,x)
--R
--R
--R (1)
--R - 6sinh(a x) - 6cosh(a x) + 2
--R /
--R          3          2
--R 3a sinh(a x) + (9a cosh(a x) - 9a)sinh(a x)
--R +
--R          2          3
--R (9a cosh(a x) - 18a cosh(a x) + 9a)sinh(a x) + 3a cosh(a x)
--R +
--R          2
--R - 9a cosh(a x) + 9a cosh(a x) - 3a
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

--S 106
bb:=1/(2*a)*coth((a*x)/2)-1/(6*a)*coth((a*x)/2)^3
--R
--R          a x 3          a x
--R - coth(---) + 3coth(---)
--R          2          2
--R (2) -----
--R          6a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

--S 107 14:580 Axiom cannot simplify this expression
cc:=aa-bb
--R
--R (3)
--R          a x 3          a x          3
--R (coth(---) - 3coth(---))sinh(a x)
--R          2          2
--R +

```

```

--R      a x 3      a x      2
--R      ((3cosh(a x) - 3)coth(---) + (- 9cosh(a x) + 9)coth(---))sinh(a x)
--R      2      2
--R      +
--R      2      a x 3
--R      (3cosh(a x) - 6cosh(a x) + 3)coth(---)
--R      2
--R      +
--R      2      a x
--R      (- 9cosh(a x) + 18cosh(a x) - 9)coth(---) - 12
--R      2
--R      *
--R      sinh(a x)
--R      +
--R      3      2      a x 3
--R      (cosh(a x) - 3cosh(a x) + 3cosh(a x) - 1)coth(---)
--R      2
--R      +
--R      3      2      a x
--R      (- 3cosh(a x) + 9cosh(a x) - 9cosh(a x) + 3)coth(---) - 12cosh(a x) + 4
--R      2
--R      /
--R      3      2
--R      6a sinh(a x) + (18a cosh(a x) - 18a)sinh(a x)
--R      +
--R      2      3
--R      (18a cosh(a x) - 36a cosh(a x) + 18a)sinh(a x) + 6a cosh(a x)
--R      +
--R      2
--R      - 18a cosh(a x) + 18a cosh(a x) - 6a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

20 [1]:14.581  $\int \frac{dx}{p + q \cosh ax}$

$$\int \frac{1}{p + q \cosh ax} = \begin{cases} \frac{2}{a\sqrt{q^2 - p^2}} \tan^{-1} \frac{qe^{ax} + p}{\sqrt{q^2 - p^2}} \\ \frac{1}{a\sqrt{p^2 - a^2}} \ln \left( \frac{qe^{ax} + p - \sqrt{p^2 - q^2}}{qe^{ax} + p + \sqrt{p^2 - q^2}} \right) \end{cases}$$

<\*)+=

)clear all

--S 108

aa:=integrate(1/(p+q\*cosh(a\*x)),x)

--R

--R

--R (1)

--R [

--R log

--R  $q^2 \sinh^2(ax) + (2q^2 \cosh^2(ax) + 2pq) \sinh(ax) + q^2 \cosh^2(ax)$

--R +  $2pq \cosh^2(ax) - q^2 + 2p^2$

--R \*  $\frac{1}{\sqrt{-q^2 + p^2}}$

--R +  $\frac{(2q^3 - 2pq^2) \sinh^3(ax) + (2q^3 - 2pq^2) \cosh^3(ax) + 2pq^2 - 2p^3}{q^2 \sinh^2(ax) + (2q^2 \cosh^2(ax) + 2p) \sinh(ax) + q^2 \cosh^2(ax)}$

--R /  $2p \cosh(ax) + q$

--R /  $a \sqrt{-q^2 + p^2}$

--R ,  $2 \operatorname{atan}\left(\frac{(q \sinh(ax) + q \cosh(ax) + p) \sqrt{q^2 - p^2}}{\dots}\right)$

```

--R          2 2
--R          q  - p
--R  -----]
--R          +-----+
--R          | 2 2
--R          a\|q  - p
--R
--R                                          Type: Union(List Expression Integer,...)
--E

```

```

--S 109
bb1:=2/(a*sqrt(q^2-p^2))*atan((q*e^(a*x)+p)/sqrt(q^2-p^2))
--R
--R          a x
--R          q %e  + p
--R          2atan(-----)
--R          +-----+
--R          | 2 2
--R          \|q  - p
--R  (2) -----
--R          +-----+
--R          | 2 2
--R          a\|q  - p
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 110
bb2:=1/(a*sqrt(p^2-q^2))*log((q*e^(a*x)+p-sqrt(p^2-q^2))/(q*e^(a*x)+p+sqrt(p^2-q^2)))
--R
--R          +-----+
--R          | 2 2          a x
--R          - \|- q  + p  + q %e  + p
--R          log(-----)
--R          +-----+
--R          | 2 2          a x
--R          \|- q  + p  + q %e  + p
--R  (3) -----
--R          +-----+
--R          | 2 2
--R          a\|- q  + p
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 111
cc1:=aa.1-bb1
--R
--R  (4)

```

```

--R          +-----+
--R          | 2 2
--R          \|q - p
--R    *
--R    log
--R          2      2      2
--R          q sinh(a x) + (2q cosh(a x) + 2p q)sinh(a x) + q cosh(a x)
--R          +
--R          2      2
--R          2p q cosh(a x) - q + 2p
--R    *
--R          +-----+
--R          | 2 2
--R          \|- q + p
--R    +
--R          3      2      3      2      2      3
--R          (2q - 2p q)sinh(a x) + (2q - 2p q)cosh(a x) + 2p q - 2p
--R    /
--R          2      2
--R          q sinh(a x) + (2q cosh(a x) + 2p)sinh(a x) + q cosh(a x)
--R          +
--R          2p cosh(a x) + q
--R    +
--R          +-----+          a x
--R          | 2 2          q %e + p
--R          - 2\|- q + p atan(-----)
--R          +-----+
--R          | 2 2
--R          \|q - p
--R    /
--R          +-----+ +-----+
--R          | 2 2 | 2 2
--R          a\|- q + p \|q - p
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 112
cc2:=aa.2-bb1

```

```

--R
--R
--R          +-----+
--R          | 2 2
--R          (q sinh(a x) + q cosh(a x) + p)\|q - p
--R          2atan(-----) - 2atan(-----)
--R          2      2          a x
--R          q - p          q %e + p
--R          +-----+
--R          | 2 2
--R          \|q - p

```

```

--R (5) -----
--R                                     +-----+
--R                                     | 2  2
--R                                   a\|q  - p
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 113
cc3:=aa.1-bb2

```

```

--R (6)
--R   log
--R      2      2      2      2      2
--R      q sinh(a x) + (2q cosh(a x) + 2p q)sinh(a x) + q cosh(a x)
--R      +
--R      2      2
--R      2p q cosh(a x) - q  + 2p
--R      *
--R      +-----+
--R      | 2  2
--R      \|- q  + p
--R      +
--R      3      2      3      2      2      3
--R      (2q  - 2p q)sinh(a x) + (2q  - 2p q)cosh(a x) + 2p q  - 2p
--R      /
--R      2      2
--R      q sinh(a x) + (2q cosh(a x) + 2p)sinh(a x) + q cosh(a x)
--R      +
--R      2p cosh(a x) + q
--R      +
--R      +-----+
--R      | 2  2      a x
--R      - \|- q  + p  + q %e  + p
--R      - log(-----)
--R      +-----+
--R      | 2  2      a x
--R      \|- q  + p  + q %e  + p
--R      /
--R      +-----+
--R      | 2  2
--R      a\|- q  + p
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 114   14:581 Axiom cannot simplify this expression
cc4:=aa.2-bb2

```

```

--R
--R (7)
--R
--R          +-----+
--R          | 2 2      a x
--R          - \|- q + p  + q %e  + p
--R - \|q - p log(-----)
--R          +-----+
--R          | 2 2      a x
--R          \|- q + p  + q %e  + p
--R
--R +
--R
--R          +-----+
--R          | 2 2      (q sinh(a x) + q cosh(a x) + p)\|q - p
--R 2\|- q + p atan(-----)
--R          2 2
--R          q - p
--R
--R /
--R
--R          +-----+ +-----+
--R          | 2 2 | 2 2
--R a\|- q + p \|q - p
--R
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

21 [1]:14.582  $\int \frac{dx}{(p + q \cosh ax)^2} dx$

$$\int \frac{1}{(p + q \cosh ax)^2} = \frac{q \sinh ax}{a(q^2 - p^2)(p + q \cosh ax)} - \frac{p}{q^2 - p^2} \int \frac{1}{p + q \cosh ax}$$

(\*)+=  
)clear all

--S 115

aa:=integrate(1/(p+q\*cosh(a\*x))^2,x)

--R

--R

--R (1)

--R [

```

--R          2          2          2
--R      p q sinh(a x) + (2p q cosh(a x) + 2p )sinh(a x) + p q cosh(a x)
--R      +
--R          2
--R      2p cosh(a x) + p q
--R      *
--R      log
--R          2          2          2
--R      q sinh(a x) + (2q cosh(a x) + 2p q)sinh(a x)
--R      +
--R          2          2          2          2
--R      q cosh(a x) + 2p q cosh(a x) - q + 2p
--R      *
--R      +-----+
--R      |  2    2
--R      \|- q  + p
--R      +
--R          3          2          3          2          2          3
--R      (- 2q + 2p q)sinh(a x) + (- 2q + 2p q)cosh(a x) - 2p q + 2p
--R      /
--R          2          2          2
--R      q sinh(a x) + (2q cosh(a x) + 2p)sinh(a x) + q cosh(a x)
--R      +
--R      2p cosh(a x) + q
--R      +
--R          +-----+
--R          |  2    2
--R      (- 2p sinh(a x) - 2p cosh(a x) - 2q)\|- q  + p
--R      /
--R          3          2          2
--R      (a q - a p q)sinh(a x)

```



```

--R      +
--R      3      2      2      3
--R      ((2a q  - 2a p q)cosh(a x) + 2a p q  - 2a p )sinh(a x)
--R      +
--R      3      2      2      2      3      3      2
--R      (a q  - a p q)cosh(a x)  + (2a p q  - 2a p )cosh(a x) + a q  - a p q
--R      *
--R      +-----+
--R      | 2  2
--R      \|- q  + p
--R      ,
--R      2      2
--R      - 2p q sinh(a x)  + (- 4p q cosh(a x) - 4p )sinh(a x)
--R      +
--R      2      2
--R      - 2p q cosh(a x)  - 4p cosh(a x) - 2p q
--R      *
--R      +-----+
--R      | 2  2
--R      (q sinh(a x) + q cosh(a x) + p)\|q  - p
--R      atan(-----)
--R      2      2
--R      q  - p
--R      +
--R      +-----+
--R      | 2  2
--R      (- 2p sinh(a x) - 2p cosh(a x) - 2q)\|q  - p
--R      /
--R      3      2      2
--R      (a q  - a p q)sinh(a x)
--R      +
--R      3      2      2      3
--R      ((2a q  - 2a p q)cosh(a x) + 2a p q  - 2a p )sinh(a x)
--R      +
--R      3      2      2      2      3      3      2
--R      (a q  - a p q)cosh(a x)  + (2a p q  - 2a p )cosh(a x) + a q  - a p q
--R      *
--R      +-----+
--R      | 2  2
--R      \|q  - p
--R      ]
--R
--R      Type: Union(List Expression Integer,...)
--E

```

--S 116

```

t1:=integrate(1/(p+q*cosh(a*x)),x)
--R
--R (2)
--R [
--R   log
--R     2      2      2      2      2
--R     q sinh(a x) + (2q cosh(a x) + 2p q)sinh(a x) + q cosh(a x)
--R   +
--R     2      2
--R     2p q cosh(a x) - q + 2p
--R   *
--R     +-----+
--R     | 2 2
--R     \|- q + p
--R   +
--R     3      2      3      2      2      3
--R     (2q - 2p q)sinh(a x) + (2q - 2p q)cosh(a x) + 2p q - 2p
--R   /
--R     2      2
--R     q sinh(a x) + (2q cosh(a x) + 2p)sinh(a x) + q cosh(a x)
--R   +
--R     2p cosh(a x) + q
--R /
--R   +-----+
--R   | 2 2
--R   a\|- q + p
--R ,
--R                                     +-----+
--R                                     | 2 2
--R     (q sinh(a x) + q cosh(a x) + p)\|q - p
--R 2atan(-----)
--R                                     2 2
--R                                     q - p
--R -----]
--R                                     +-----+
--R                                     | 2 2
--R                                     a\|q - p
--R
--R                                     Type: Union(List Expression Integer,...)
--E

```

```

--S 117
bb1:=(q*sinh(a*x))/(a*(q^2-p^2)*(p+q*cosh(a*x)))-p/(q^2-p^2)*t1.1
--R
--R (3)
--R
--R     2
--R     (- p q cosh(a x) - p )

```

```

--R      *
--R      log
--R      2      2      2      2      2
--R      q sinh(a x) + (2q cosh(a x) + 2p q)sinh(a x) + q cosh(a x)
--R      +
--R      2      2
--R      2p q cosh(a x) - q + 2p
--R      *
--R      +-----+
--R      | 2 2
--R      \|- q + p
--R      +
--R      3      2      3      2      2      3
--R      (2q - 2p q)sinh(a x) + (2q - 2p q)cosh(a x) + 2p q - 2p
--R      /
--R      2      2
--R      q sinh(a x) + (2q cosh(a x) + 2p)sinh(a x) + q cosh(a x)
--R      +
--R      2p cosh(a x) + q
--R      +
--R      +-----+
--R      | 2 2
--R      q sinh(a x)\|- q + p
--R      /
--R      +-----+
--R      3      2      2      3 | 2 2
--R      ((a q - a p q)cosh(a x) + a p q - a p)\|- q + p
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

--S 118

bb2:=(q\*sinh(a\*x))/(a\*(q^2-p^2)\*(p+q\*cosh(a\*x)))-p/(q^2-p^2)\*t1.2

```

--R
--R      (4)
--R      +-----+
--R      | 2 2
--R      (q sinh(a x) + q cosh(a x) + p)\|q - p
--R      (- 2p q cosh(a x) - 2p )atan(-----)
--R      2      2
--R      q - p
--R      +
--R      +-----+
--R      | 2 2
--R      q sinh(a x)\|q - p
--R      /
--R      +-----+

```

```

--R      3      2      2      3 | 2      2
--R      ((a q  - a p q)cosh(a x) + a p q  - a p )\|q  - p
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 119
cc1:=aa.1-bb1

```

```

--R
--R      (5)
--R      2      2      2
--R      (p q cosh(a x) + p q)sinh(a x)
--R      +
--R      2      2      2      3      2      3
--R      (2p q cosh(a x) + 4p q cosh(a x) + 2p )sinh(a x) + p q cosh(a x)
--R      +
--R      2      2      2      3      2
--R      3p q cosh(a x) + (p q + 2p )cosh(a x) + p q
--R      *
--R      log
--R      2      2      2      2      2
--R      q sinh(a x) + (2q cosh(a x) + 2p q)sinh(a x) + q cosh(a x)
--R      +
--R      2      2
--R      2p q cosh(a x) - q + 2p
--R      *
--R      +-----+
--R      | 2      2
--R      \|- q + p
--R      +
--R      3      2      3      2      2      3
--R      (2q - 2p q)sinh(a x) + (2q - 2p q)cosh(a x) + 2p q - 2p
--R      /
--R      2      2
--R      q sinh(a x) + (2q cosh(a x) + 2p)sinh(a x) + q cosh(a x)
--R      +
--R      2p cosh(a x) + q
--R      +
--R      2      2      2
--R      (p q cosh(a x) + p q)sinh(a x)
--R      +
--R      2      2      2      3      2      3
--R      (2p q cosh(a x) + 4p q cosh(a x) + 2p )sinh(a x) + p q cosh(a x)
--R      +
--R      2      2      2      3      2
--R      3p q cosh(a x) + (p q + 2p )cosh(a x) + p q
--R      *

```

```

--R      log
--R      2      2      2      2      2
--R      q sinh(a x) + (2q cosh(a x) + 2p q)sinh(a x) + q cosh(a x)
--R      +
--R      2      2
--R      2p q cosh(a x) - q + 2p
--R      *
--R      +-----+
--R      | 2 2
--R      \|- q + p
--R      +
--R      3      2      3      2      2      3
--R      (- 2q + 2p q)sinh(a x) + (- 2q + 2p q)cosh(a x) - 2p q + 2p
--R      /
--R      2      2
--R      q sinh(a x) + (2q cosh(a x) + 2p)sinh(a x) + q cosh(a x)
--R      +
--R      2p cosh(a x) + q
--R      +
--R      2      3      2      2
--R      - q sinh(a x) + (- 2q cosh(a x) - 2p q)sinh(a x)
--R      +
--R      2      2      2      2
--R      (- q cosh(a x) - 4p q cosh(a x) - q - 2p )sinh(a x)
--R      +
--R      2      2      2
--R      - 2p q cosh(a x) + (- 2q - 2p )cosh(a x) - 2p q
--R      *
--R      +-----+
--R      | 2 2
--R      \|- q + p
--R      /
--R      4      2 2      3      3      2
--R      ((a q - a p q )cosh(a x) + a p q - a p q)sinh(a x)
--R      +
--R      4      2 2      2      3      3      2 2
--R      (2a q - 2a p q )cosh(a x) + (4a p q - 4a p q)cosh(a x) + 2a p q
--R      +
--R      4
--R      - 2a p
--R      *
--R      sinh(a x)
--R      +
--R      4      2 2      3      3      3      2
--R      (a q - a p q )cosh(a x) + (3a p q - 3a p q)cosh(a x)
--R      +

```

```

--R      4      2 2      4      3      3
--R      (a q + a p q - 2a p )cosh(a x) + a p q - a p q
--R      *
--R      +-----+
--R      | 2 2
--R      \|- q + p
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 120
cc2:=aa.2-bb1

```

```

--R      (6)
--R      2      2      2
--R      (p q cosh(a x) + p q)sinh(a x)
--R      +
--R      2      2      2      3      2      3
--R      (2p q cosh(a x) + 4p q cosh(a x) + 2p )sinh(a x) + p q cosh(a x)
--R      +
--R      2      2      2      3      2
--R      3p q cosh(a x) + (p q + 2p )cosh(a x) + p q
--R      *
--R      +-----+
--R      | 2 2
--R      \|q - p
--R      *
--R      log
--R      2      2      2      2      2
--R      q sinh(a x) + (2q cosh(a x) + 2p q)sinh(a x) + q cosh(a x)
--R      +
--R      2      2
--R      2p q cosh(a x) - q + 2p
--R      *
--R      +-----+
--R      | 2 2
--R      \|- q + p
--R      +
--R      3      2      3      2      2      3
--R      (2q - 2p q)sinh(a x) + (2q - 2p q)cosh(a x) + 2p q - 2p
--R      /
--R      2      2
--R      q sinh(a x) + (2q cosh(a x) + 2p)sinh(a x) + q cosh(a x)
--R      +
--R      2p cosh(a x) + q
--R      +
--R      2      2      2

```

$$\begin{aligned}
& (-2p q \cosh(ax) - 2p q) \sinh(ax) \\
& + (-4p^2 q \cosh^2(ax) - 8p^2 q \cosh^2(ax) - 4p^3) \sinh^3(ax) - 2p^2 q \cosh^2(ax) \\
& - 6p^2 q \cosh^2(ax) + (-2p^2 q - 4p^3) \cosh^3(ax) - 2p^2 q \\
& * \frac{\sqrt{-q^2 + p^2} \operatorname{atan}\left(\frac{(q \sinh(ax) + q \cosh(ax) + p)\sqrt{q^2 - p^2}}{q^2 - p^2}\right)}{q^2 - p^2} \\
& + (-q \sinh^3(ax) + (-2q \cosh^2(ax) - 2p q) \sinh^2(ax) \\
& + (-q \cosh^2(ax) - 4p q \cosh^2(ax) - q^2 - 2p^2) \sinh^2(ax) \\
& - 2p^2 q \cosh^2(ax) + (-2q^2 - 2p^2) \cosh^2(ax) - 2p^2 q \\
& * \frac{\sqrt{-q^2 + p^2} \sqrt{q^2 - p^2}}{\sqrt{-q^2 + p^2} \sqrt{q^2 - p^2}} \\
& / \left( (a^4 q^4 - a^2 p^2 q^2) \cosh^3(ax) + a^3 p^3 q^3 - a^2 p^2 q^2 \sinh^2(ax) \right. \\
& + (2a^4 q^4 - 2a^2 p^2 q^2) \cosh^2(ax) + (4a^3 p^3 q^3 - 4a^2 p^2 q^2) \cosh^2(ax) + 2a^2 p^2 q^2 \\
& - 2a^4 p^4 \\
& * \sinh(ax) \\
& + (a^4 q^4 - a^2 p^2 q^2) \cosh^3(ax) + (3a^3 p^3 q^3 - 3a^2 p^2 q^2) \cosh^3(ax) \\
& + (a^4 q^4 + a^2 p^2 q^2 - 2a^4 p^4) \cosh^4(ax) + a^3 p^3 q^3 - a^2 p^2 q^2 \\
& * \frac{\sqrt{-q^2 + p^2} \sqrt{q^2 - p^2}}{\sqrt{-q^2 + p^2} \sqrt{q^2 - p^2}}
\end{aligned}$$

```

--R      | 2 2 | 2 2
--R      \|- q + p \|q - p
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 121
cc3:=aa.1-bb2

```

```

--R
--R (7)
--R      2      2      2
--R      (p q cosh(a x) + p q)sinh(a x)
--R      +
--R      2      2      2      3      2      3
--R      (2p q cosh(a x) + 4p q cosh(a x) + 2p )sinh(a x) + p q cosh(a x)
--R      +
--R      2      2      2      3      2
--R      3p q cosh(a x) + (p q + 2p )cosh(a x) + p q
--R      *
--R      +-----+
--R      | 2 2
--R      \|q - p
--R      *
--R      log
--R      2      2      2      2      2
--R      q sinh(a x) + (2q cosh(a x) + 2p q)sinh(a x) + q cosh(a x)
--R      +
--R      2      2
--R      2p q cosh(a x) - q + 2p
--R      *
--R      +-----+
--R      | 2 2
--R      \|- q + p
--R      +
--R      3      2      3      2      2      3
--R      (- 2q + 2p q)sinh(a x) + (- 2q + 2p q)cosh(a x) - 2p q + 2p
--R      /
--R      2      2
--R      q sinh(a x) + (2q cosh(a x) + 2p)sinh(a x) + q cosh(a x)
--R      +
--R      2p cosh(a x) + q
--R      +
--R      2      2      2
--R      (2p q cosh(a x) + 2p q)sinh(a x)
--R      +
--R      2      2      2      3      2      3
--R      (4p q cosh(a x) + 8p q cosh(a x) + 4p )sinh(a x) + 2p q cosh(a x)

```



```

--R      +
--R      2      2      2      3      2
--R      6p q cosh(a x) + (2p q + 4p )cosh(a x) + 2p q
--R      *
--R      +-----+
--R      | 2 2      (q sinh(a x) + q cosh(a x) + p)\|q - p
--R      \|- q + p atan(-----)
--R      2 2
--R      q - p
--R      +
--R      2      3      2      2
--R      - q sinh(a x) + (- 2q cosh(a x) - 2p q)sinh(a x)
--R      +
--R      2      2      2      2
--R      (- q cosh(a x) - 4p q cosh(a x) - q - 2p )sinh(a x)
--R      +
--R      2      2      2
--R      - 2p q cosh(a x) + (- 2q - 2p )cosh(a x) - 2p q
--R      *
--R      +-----+ +-----+
--R      | 2 2 | 2 2
--R      \|- q + p \|q - p
--R      /
--R      4      2 2      3      3      2
--R      ((a q - a p q )cosh(a x) + a p q - a p q)sinh(a x)
--R      +
--R      4      2 2      2      3      3      2 2
--R      (2a q - 2a p q )cosh(a x) + (4a p q - 4a p q)cosh(a x) + 2a p q
--R      +
--R      4
--R      - 2a p
--R      *
--R      sinh(a x)
--R      +
--R      4      2 2      3      3      3      2
--R      (a q - a p q )cosh(a x) + (3a p q - 3a p q)cosh(a x)
--R      +
--R      4      2 2      4      3      3
--R      (a q + a p q - 2a p )cosh(a x) + a p q - a p q
--R      *
--R      +-----+ +-----+
--R      | 2 2 | 2 2
--R      \|- q + p \|q - p
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

--S 122 14:582 Axiom cannot simplify this expression

cc4:=aa.2-bb2

--R

(8)

$$\begin{aligned} & -q^2 \sinh(ax)^3 + (-2q \cosh(ax) - 2pq) \sinh(ax)^2 \\ & + (-q \cosh(ax)^2 - 4pq \cosh(ax) - q^2 - 2p^2) \sinh(ax) - 2pq \cosh(ax)^2 \\ & + (-2q^2 - 2p^2) \cosh(ax) - 2pq \\ & / \\ & ((a^4 q^4 - a^2 p^2 q^2) \cosh(ax) + a^3 p^3 q^3 - a^2 p^2 q^2) \sinh(ax) \\ & + (2a^4 q^4 - 2a^2 p^2 q^2) \cosh(ax) + (4a^3 p^3 q^3 - 4a^2 p^2 q^2) \cosh(ax) + 2a^2 p^2 q^2 \\ & - 2a^4 p^4 \\ & * \sinh(ax) \\ & + (a^4 q^4 - a^2 p^2 q^2) \cosh(ax) + (3a^3 p^3 q^3 - 3a^2 p^2 q^2) \cosh(ax) \\ & + (a^4 q^4 + a^2 p^2 q^2 - 2a^4 p^4) \cosh(ax) + a^3 p^3 q^3 - a^2 p^2 q^2 \end{aligned}$$

Type: Expression Integer

--E

22 [1]:14.583  $\int \frac{dx}{p^2 - q^2 \cosh^2 ax}$

$$\int \frac{1}{p^2 - q^2 \cosh^2 ax} = \begin{cases} \frac{1}{2ap\sqrt{p^2 - q^2}} \ln \left( \frac{p \tanh ax + \sqrt{p^2 - q^2}}{p \tanh ax - \sqrt{p^2 - q^2}} \right) \\ \frac{1}{ap\sqrt{q^2 - p^2}} \tan^{-1} \frac{p \tanh ax}{\sqrt{q^2 - p^2}} \end{cases}$$

```
(*)+=
)clear all
```

```
--S 123
```

```
aa:=integrate(1/(p^2-q^2*cosh(a*x)^2),x)
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R (1)
```

```
--R [
```

```
--R log
```

```
--R      4      4      4      3
```

```
--R      q sinh(a x) + 4q cosh(a x)sinh(a x)
```

```
--R +
```

```
--R      4      2      4      2 2      2
```

```
--R      (6q cosh(a x) + 2q - 4p q )sinh(a x)
```

```
--R +
```

```
--R      4      3      4      2 2
```

```
--R      (4q cosh(a x) + (4q - 8p q )cosh(a x))sinh(a x)
```

```
--R +
```

```
--R      4      4      4      2 2      2      4      2 2      4
```

```
--R      q cosh(a x) + (2q - 4p q )cosh(a x) + q - 8p q + 8p
```

```
--R *
```

```
--R      +-----+
```

```
--R      | 2 2
```

```
--R      \|- q + p
```

```
--R +
```

```
--R      4      3 2      2      4      3 2
```

```
--R      (- 4p q + 4p q )sinh(a x) + (- 8p q + 8p q )cosh(a x)sinh(a x)
```

```
--R +
```

```
--R      4      3 2      2      4      3 2      5
```

```
--R      (- 4p q + 4p q )cosh(a x) - 4p q + 12p q - 8p
```

```
--R /
```

```
--R      2      4      2      3
```

```
--R      q sinh(a x) + 4q cosh(a x)sinh(a x)
```

```
--R +
```

```
--R      2      2      2      2      2
```

```

--R      (6q cosh(a x) + 2q - 4p )sinh(a x)
--R      +
--R      2      3      2      2      2      4
--R      (4q cosh(a x) + (4q - 8p )cosh(a x))sinh(a x) + q cosh(a x)
--R      +
--R      2      2      2      2
--R      (2q - 4p )cosh(a x) + q
--R      /
--R      +-----+
--R      | 2 2
--R      2a p\|- q + p
--R      ,
--R      -
--R      atan
--R      2      2      2      2      2      2
--R      q sinh(a x) + 2q cosh(a x)sinh(a x) + q cosh(a x) + q
--R      +
--R      2
--R      - 2p
--R      *
--R      +-----+
--R      | 2 2
--R      \|q - p
--R      /
--R      2      3
--R      2p q - 2p
--R      /
--R      +-----+
--R      | 2 2
--R      a p\|q - p
--R      ]
--R
--R                                          Type: Union(List Expression Integer,...)
--E

```

```

--S 124
bb1:=1/(2*a*p*sqrt(p^2-q^2))*log((p*tanh(a*x)+sqrt(p^2-q^2))/(p*tanh(a*x)-sqrt(p^2-q^2)))
--R
--R      +-----+
--R      | 2 2
--R      - \|- q + p - p tanh(a x)
--R      log(-----)
--R      +-----+
--R      | 2 2
--R      \|- q + p - p tanh(a x)
--R      (2) -----

```

```

--R          +-----+
--R          | 2 2
--R      2a p\|- q  + p
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 125
bb2:=-1/(a*p*sqrt(q^2-p^2))*atan((p*tanh(a*x))/sqrt(q^2-p^2))

```

```

--R          p tanh(a x)
--R      atan(-----)
--R          +-----+
--R          | 2 2
--R          \|q  - p
--R      (3)  - -----
--R          +-----+
--R          | 2 2
--R          a p\|q  - p
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 126
cc1:=aa.1-bb1

```

```

--R      (4)
--R      log
--R          4      4      4      3
--R      q sinh(a x) + 4q cosh(a x)sinh(a x)
--R      +
--R          4      2      4      2 2      2
--R      (6q cosh(a x) + 2q - 4p q )sinh(a x)
--R      +
--R          4      3      4      2 2
--R      (4q cosh(a x) + (4q - 8p q )cosh(a x))sinh(a x)
--R      +
--R          4      4      4      2 2      2      4      2 2      4
--R      q cosh(a x) + (2q - 4p q )cosh(a x) + q - 8p q + 8p
--R      *
--R          +-----+
--R          | 2 2
--R          \|- q  + p
--R      +
--R          4      3 2      2      4      3 2
--R      (- 4p q + 4p q )sinh(a x) + (- 8p q + 8p q )cosh(a x)sinh(a x)
--R      +
--R          4      3 2      2      4      3 2      5

```

```

--R      (- 4p q + 4p q )cosh(a x) - 4p q + 12p q - 8p
--R      /
--R      2      4      2      3
--R      q sinh(a x) + 4q cosh(a x)sinh(a x)
--R      +
--R      2      2      2      2      2
--R      (6q cosh(a x) + 2q - 4p )sinh(a x)
--R      +
--R      2      3      2      2      2      4
--R      (4q cosh(a x) + (4q - 8p )cosh(a x))sinh(a x) + q cosh(a x)
--R      +
--R      2      2      2      2
--R      (2q - 4p )cosh(a x) + q
--R      +
--R      +-----+
--R      | 2 2
--R      - \|- q + p - p tanh(a x)
--R      - log(-----)
--R      +-----+
--R      | 2 2
--R      \|- q + p - p tanh(a x)
--R      /
--R      +-----+
--R      | 2 2
--R      2a p\|- q + p
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 127
cc2:=aa.2-bb1

```

```

--R
--R      (5)
--R      +-----+
--R      +-----+ | 2 2
--R      | 2 2 - \|- q + p - p tanh(a x)
--R      - \|q - p log(-----)
--R      +-----+
--R      | 2 2
--R      \|- q + p - p tanh(a x)
--R      +
--R      -
--R      +-----+
--R      | 2 2
--R      2\|- q + p
--R      *
--R      atan

```

```

--R          2      2      2          2      2      2
--R      q sinh(a x) + 2q cosh(a x)sinh(a x) + q cosh(a x) + q
--R      +
--R          2
--R      - 2p
--R      *
--R      +-----+
--R      | 2      2
--R      \|q - p
--R      /
--R          2      3
--R      2p q - 2p
--R /
--R      +-----+ +-----+
--R      | 2      2 | 2      2
--R      2a p\|- q + p \|q - p
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

--S 128

cc3:=aa.1-bb2

```

--R
--R      (6)
--R      +-----+
--R      | 2      2
--R      \|q - p
--R      *
--R      log
--R          4      4      4          3
--R      q sinh(a x) + 4q cosh(a x)sinh(a x)
--R      +
--R          4      2      4      2 2      2
--R      (6q cosh(a x) + 2q - 4p q )sinh(a x)
--R      +
--R          4      3      4      2 2
--R      (4q cosh(a x) + (4q - 8p q )cosh(a x))sinh(a x)
--R      +
--R          4      4      4      2 2      2      4      2 2      4
--R      q cosh(a x) + (2q - 4p q )cosh(a x) + q - 8p q + 8p
--R      *
--R      +-----+
--R      | 2      2
--R      \|- q + p
--R      +
--R          4      3 2      2
--R      (- 4p q + 4p q )sinh(a x)

```

```

--R      +
--R      4      3 2
--R      (- 8p q + 8p q )cosh(a x)sinh(a x)
--R      +
--R      4      3 2      2      4      3 2      5
--R      (- 4p q + 4p q )cosh(a x) - 4p q + 12p q - 8p
--R      /
--R      2      4      2      3
--R      q sinh(a x) + 4q cosh(a x)sinh(a x)
--R      +
--R      2      2      2      2      2
--R      (6q cosh(a x) + 2q - 4p )sinh(a x)
--R      +
--R      2      3      2      2      2      4
--R      (4q cosh(a x) + (4q - 8p )cosh(a x))sinh(a x) + q cosh(a x)
--R      +
--R      2      2      2      2
--R      (2q - 4p )cosh(a x) + q
--R      +
--R      +-----+
--R      | 2 2      p tanh(a x)
--R      2\|- q + p atan(-----)
--R      +-----+
--R      | 2 2
--R      \|q - p
--R      /
--R      +-----+ +-----+
--R      | 2 2 | 2 2
--R      2a p\|- q + p \|q - p
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

--S 129 14:583 Axiom cannot simplify this expression

cc4:=aa.2-bb2

--R

--R (7)

--R -

--R atan

--R 2 2 2 2 2 2

$$q \sinh(a x)^2 + 2q \cosh(a x) \sinh(a x) + q \cosh(a x)^2 + q$$

--R +

--R 2

--R - 2p

--R \*

--R +-----+

--R | 2 2



```

--R          \|q - p
--R          /
--R          2      3
--R          2p q - 2p
--R  +
--R          p tanh(a x)
--R          atan(-----)
--R          +-----+
--R          | 2      2
--R          \|q - p
--R  /
--R          +-----+
--R          | 2      2
--R          a p\|q - p
--R
--E

```

Type: Expression Integer

23 [1]:14.584  $\int \frac{dx}{p^2 + q^2 \cosh^2 ax}$

$$\int \frac{1}{p^2 + q^2 \cosh^2 ax} = \begin{cases} \frac{1}{2ap\sqrt{p^2 + q^2}} \ln \left( \frac{p \tanh ax + \sqrt{p^2 + q^2}}{p \tanh ax - \sqrt{p^2 + q^2}} \right) \\ \frac{1}{ap\sqrt{p^2 + q^2}} \tan^{-1} \frac{p \tanh ax}{\sqrt{p^2 + q^2}} \end{cases}$$

<\*)+=

)clear all

--S 130

aa:=integrate(1/(p^2+q^2\*cosh(a\*x)^2),x)

--R

--R

--R (1)

--R log

$$\begin{aligned} & \frac{q^4 \sinh^4(ax) + 4q^4 \cosh^4(ax) \sinh^3(ax)}{(6q^4 \cosh^4(ax) + 2q^2 + 4p^2 q^2) \sinh^2(ax)} \\ & + \frac{(4q^4 \cosh^3(ax) + (4q^4 + 8p^2 q^2) \cosh^2(ax)) \sinh^4(ax) + q^4 \cosh^4(ax)}{(2q^4 + 4p^2 q^2) \cosh^2(ax) + q^2 + 8p^2 q^2 + 8p^4} \\ & * \frac{\sqrt{q^2 + p^2}}{\sqrt{q^2 + p^2}} \\ & + \frac{(-4p^4 q^4 - 4p^3 q^2) \sinh^2(ax) + (-8p^4 q^4 - 8p^3 q^2) \cosh^2(ax) \sinh^2(ax)}{(-4p^4 q^4 - 4p^3 q^2) \cosh^2(ax) - 4p^4 q^4 - 12p^3 q^2 - 8p^5} \\ & / \frac{q^2 \sinh^4(ax) + 4q^2 \cosh^4(ax) \sinh^3(ax)}{(6q^2 \cosh^4(ax) + 2q^2 + 4p^2) \sinh^2(ax)} \end{aligned}$$

```

--R      +
--R      2      3      2      2      2      4
--R      (4q cosh(a x) + (4q + 8p )cosh(a x))sinh(a x) + q cosh(a x)
--R      +
--R      2      2      2      2
--R      (2q + 4p )cosh(a x) + q
--R      /
--R      +-----+
--R      | 2      2
--R      2a p\|q + p
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

```

```

--S 131
bb1:=1/(2*a*p*sqrt(p^2+q^2))*log((p*tanh(a*x)+sqrt(p^2+q^2))/(p*tanh(a*x)-sqrt(p^2+q^2)))
--R
--R      +-----+
--R      | 2      2
--R      - \|q + p - p tanh(a x)
--R      log(-----)
--R      +-----+
--R      | 2      2
--R      \|q + p - p tanh(a x)
--R      (2) -----
--R      +-----+
--R      | 2      2
--R      2a p\|q + p
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 132
bb2:=1/(a*p*sqrt(p^2+q^2))*atan((p*tanh(a*x))/sqrt(p^2+q^2))
--R
--R      p tanh(a x)
--R      atan(-----)
--R      +-----+
--R      | 2      2
--R      \|q + p
--R      (3) -----
--R      +-----+
--R      | 2      2
--R      a p\|q + p
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

--S 133

cc1:=aa-bb1

```

--R
--R (4)
--R log
--R      4      4      4      3
--R      q sinh(a x) + 4q cosh(a x)sinh(a x)
--R      +
--R      4      2      4      2 2      2
--R      (6q cosh(a x) + 2q + 4p q )sinh(a x)
--R      +
--R      4      3      4      2 2
--R      (4q cosh(a x) + (4q + 8p q )cosh(a x))sinh(a x)
--R      +
--R      4      4      4      2 2      2      4      2 2      4
--R      q cosh(a x) + (2q + 4p q )cosh(a x) + q + 8p q + 8p
--R      *
--R      +-----+
--R      | 2      2
--R      \|q + p
--R      +
--R      4      3 2      2      4      3 2
--R      (- 4p q - 4p q )sinh(a x) + (- 8p q - 8p q )cosh(a x)sinh(a x)
--R      +
--R      4      3 2      2      4      3 2      5
--R      (- 4p q - 4p q )cosh(a x) - 4p q - 12p q - 8p
--R      /
--R      2      4      2      3
--R      q sinh(a x) + 4q cosh(a x)sinh(a x)
--R      +
--R      2      2      2      2      2
--R      (6q cosh(a x) + 2q + 4p )sinh(a x)
--R      +
--R      2      3      2      2      2      4
--R      (4q cosh(a x) + (4q + 8p )cosh(a x))sinh(a x) + q cosh(a x)
--R      +
--R      2      2      2      2
--R      (2q + 4p )cosh(a x) + q
--R      +
--R      +-----+
--R      | 2      2
--R      - \|q + p - p tanh(a x)
--R      - log(-----)
--R      +-----+
--R      | 2      2
--R      \|q + p - p tanh(a x)
--R      /

```

```

--R          +-----+
--R          | 2    2
--R      2a p\|q  + p
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

--S 134      14:584 Axiom cannot simplify this expression
cc2:=aa-bb2
--R
--R      (5)
--R      log
--R          4      4      4      3
--R          q sinh(a x)  + 4q cosh(a x)sinh(a x)
--R      +
--R          4      2      4      2 2      2
--R          (6q cosh(a x)  + 2q  + 4p q )sinh(a x)
--R      +
--R          4      3      4      2 2
--R          (4q cosh(a x)  + (4q  + 8p q )cosh(a x))sinh(a x)
--R      +
--R          4      4      4      2 2      2      4      2 2      4
--R          q cosh(a x)  + (2q  + 4p q )cosh(a x)  + q  + 8p q  + 8p
--R      *
--R          +-----+
--R          | 2    2
--R          \|q  + p
--R      +
--R          4      3 2      2      4      3 2
--R          (- 4p q  - 4p q )sinh(a x)  + (- 8p q  - 8p q )cosh(a x)sinh(a x)
--R      +
--R          4      3 2      2      4      3 2      5
--R          (- 4p q  - 4p q )cosh(a x)  - 4p q  - 12p q  - 8p
--R      /
--R          2      4      2      3
--R          q sinh(a x)  + 4q cosh(a x)sinh(a x)
--R      +
--R          2      2      2      2      2
--R          (6q cosh(a x)  + 2q  + 4p )sinh(a x)
--R      +
--R          2      3      2      2      2      4
--R          (4q cosh(a x)  + (4q  + 8p )cosh(a x))sinh(a x) + q cosh(a x)
--R      +
--R          2      2      2      2
--R          (2q  + 4p )cosh(a x)  + q
--R      +
--R          p tanh(a x)

```

```

--R      - 2atan(-----)
--R                +-----+
--R                | 2    2
--R               \|q  + p
--R /
--R      +-----+
--R      | 2    2
--R     2a p\|q  + p
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

24 [1]:14.585  $\int x^m \cosh ax \, dx$

$$\int x^m \cosh ax = \frac{x^m \sinh ax}{a} - \frac{m}{a} \int x^{m-1} \sinh ax$$

```

(*)+≡
)clear all

```

```

--S 135 14:585 Axiom cannot compute this integral
aa:=integrate(x^m*cosh(a*x),x)
--R
--R
--R      x
--R      ++      m
--R     (1) | cosh(%N a)%N d%N
--R      ++
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

```

25 [1]:14.586  $\int \cosh^n ax \, dx$

$$\int \cosh^n ax = \frac{\cosh^{n-1} ax \sinh ax}{an} + \frac{n-1}{n} \int \cosh^{n-2} ax$$

<\*>+≡  
)clear all

--S 136 14:586 Axiom cannot compute this integral

aa:=integrate(cosh(a\*x)^n,x)

--R

--R

```
--R      x
--R      ++
--R      |  cosh(%N a) d%N
--R      ++
```

Type: Union(Expression Integer,...)

--R

--E

26 [1]:14.587  $\int \frac{\cosh ax}{x^n} \, dx$

$$\int \frac{\cosh ax}{x^n} = \frac{-\cosh ax}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{a}{n-1} \int \frac{\sinh ax}{x^{n-1}}$$

<\*>+≡  
)clear all

--S 137 14:587 Axiom cannot compute this integral

aa:=integrate(cosh(a\*x)/x^n,x)

--R

--R

```
--R      x
--R      ++
--R      |  cosh(%N a)
--R      |  ----- d%N
--R      |  n
--R      |  %N
```

Type: Union(Expression Integer,...)

--R

--E

27 [1]:14.588  $\int \frac{dx}{\cosh^n ax}$

$$\int \frac{1}{\cosh^n ax} = \frac{\sinh ax}{a(n-1)\cosh^{n-1} ax} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{1}{\cosh^{n-2} ax}$$

<\*)+≡  
)clear all

--S 138 14:588 Axiom cannot compute this integral

aa:=integrate(1/cosh(a\*x)^n,x)

--R

--R

--R x  
--R ++ 1  
--I (1) | ----- d%N  
--R ++ n  
--I cosh(%N a)

Type: Union(Expression Integer,...)

--R

--E

28 [1]:14.589  $\int \frac{x}{\cosh^n ax}$

$$\int \frac{x}{\cosh^n ax} = \frac{x \sinh ax}{a(n-1)\cosh^{n-1} ax} + \frac{1}{(n-1)(n-2)a^2 \cosh^{n-2} ax} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{x}{\cosh^{n-2} ax}$$

<\*)+≡  
)clear all

--S 139 14:589 Axiom cannot compute this integral

aa:=integrate(1/cosh(a\*x)^n,x)

--R

--R

--R x  
--R ++ 1  
--I (1) | ----- d%N  
--R ++ n  
--I cosh(%N a)

Type: Union(Expression Integer,...)

--R

--E

)spool  
)lisp (bye)



## References

- [1] Spiegel, Murray R. *Mathematical Handbook of Formulas and Tables*  
Schaum's Outline Series McGraw-Hill 1968 pp88-89