

\$SPAD/input schaum22.input

Timothy Daly

June 15, 2008

Contents

1	[1]:14.451	$\int \sec ax \, dx$	3
2	[1]:14.452	$\int \sec^2 ax \, dx$	8
3	[1]:14.453	$\int \sec^3 ax \, dx$	10
4	[1]:14.454	$\int \sec^n ax \tan ax \, dx$	13
5	[1]:14.455	$\int \frac{dx}{\sec ax}$	14
6	[1]:14.456	$\int x \sec ax \, dx$	15
7	[1]:14.457	$\int \frac{\sec ax}{x} \, dx$	15
8	[1]:14.458	$\int x \sec^2 ax \, dx$	16
9	[1]:14.459	$\int \frac{dx}{q + p \sec ax}$	18
10	[1]:14.460	$\int \sec^n ax \, dx$	22

1 [1]:14.451 $\int \sec ax \, dx$

$$\int \sec ax = \frac{1}{a} \ln(\sec ax + \tan ax) = \frac{1}{a} \ln \tan\left(\frac{ax}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$$

```

(*)≡
)spool schaum22.output
)set message test on
)set message auto off
)clear all

--S 1
aa:=integrate(sec(a*x),x)
--R
--R
--R          sin(a x) + cos(a x) + 1          sin(a x) - cos(a x) - 1
--R      log(-----) - log(-----)
--R          cos(a x) + 1          cos(a x) + 1
--R (1) -----
--R                                     a
--R                                     Type: Union(Expression Integer,...)
--E

--S 2
bb1:=1/a*log(sec(a*x)+tan(a*x))
--R
--R      log(tan(a x) + sec(a x))
--R (2) -----
--R          a
--R
--R                                     Type: Expression Integer
--E

--S 3
bb2:=1/a*log(tan((a*x)/2+%pi/4))
--R
--R          2a x + %pi
--R      log(tan(-----))
--R          4
--R (3) -----
--R          a
--R
--R                                     Type: Expression Integer
--E

--S 4
cc1:=aa-bb1
--R

```

```

--R (4)
--R
--R          sin(a x) + cos(a x) + 1
--R      - log(tan(a x) + sec(a x)) + log(-----)
--R                                          cos(a x) + 1
--R
--R      +
--R          sin(a x) - cos(a x) - 1
--R      - log(-----)
--R                    cos(a x) + 1
--R
--R      /
--R      a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 5
tanrule:=rule(tan(a) == sin(a)/cos(a))
--R
--R          sin(a)
--R      (5) tan(a) == -----
--R                    cos(a)
--R
--R          Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

```

```

--S 6
dd1:=tanrule cc1
--R
--R      (6)
--R          sin(a x) + cos(a x)sec(a x)      sin(a x) + cos(a x) + 1
--R      - log(-----) + log(-----)
--R                    cos(a x)                    cos(a x) + 1
--R
--R      +
--R          sin(a x) - cos(a x) - 1
--R      - log(-----)
--R                    cos(a x) + 1
--R
--R      /
--R      a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 7
secrule:=rule(sec(a) == 1/cos(a))
--R
--R          1
--R      (7) sec(a) == -----
--R                    cos(a)
--R
--R          Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

```

```

--S 8
ee1:=secrule dd1
--R
--R (8)
--R      sin(a x) + 1      sin(a x) + cos(a x) + 1
--R      - log(-----) + log(-----)
--R      cos(a x)          cos(a x) + 1
--R
--R      +
--R      sin(a x) - cos(a x) - 1
--R      - log(-----)
--R      cos(a x) + 1
--R
--R /
--R a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 9
ff1:=expandLog ee1
--R
--R (9)
--R      log(sin(a x) + cos(a x) + 1) - log(sin(a x) + 1)
--R      +
--R      - log(sin(a x) - cos(a x) - 1) + log(cos(a x))
--R
--R /
--R a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 10
gg1:=complexNormalize ff1
--R
--R      log(- 1)
--R      (10) -----
--R      a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 11
cc2:=aa-bb2
--R
--R (11)
--R      2a x + %pi      sin(a x) + cos(a x) + 1
--R      - log(tan(-----)) + log(-----)
--R      4              cos(a x) + 1
--R
--R      +

```

```

--R      sin(a x) - cos(a x) - 1
--R      - log(-----)
--R                      cos(a x) + 1
--R /
--R      a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 12
dd2:=tanrule cc2
--R
--R      (12)
--R      sin(a x) + cos(a x) + 1      sin(a x) - cos(a x) - 1
--R      log(-----) - log(-----)
--R                      cos(a x) + 1      cos(a x) + 1
--R +
--R      2a x + %pi
--R      sin(-----)
--R              4
--R      - log(-----)
--R      2a x + %pi
--R      cos(-----)
--R              4
--R /
--R      a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 13
ee2:=expandLog dd2
--R
--R      (13)
--R      log(sin(a x) + cos(a x) + 1) - log(sin(a x) - cos(a x) - 1)
--R +
--R      2a x + %pi      2a x + %pi
--R      - log(sin(-----)) + log(cos(-----))
--R              4              4
--R /
--R      a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 14      14:451 Schaums and Axiom differ by a constant
ff2:=complexNormalize ee2
--R
--R      log(- 1)

```

```
--R (14) -----  
--R          a  
--R  
--E
```

Type: Expression Integer

2 [1]:14.452 $\int \sec^2 ax \, dx$

$$\int \sec^2 ax = \frac{\tan ax}{a}$$

```
(*)+≡
)clear all
```

```
--S 15
```

```
aa:=integrate(sec(a*x)^2,x)
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R      sin(a x)
```

```
--R (1) -----
```

```
--R      a cos(a x)
```

```
--R
```

```
--E
```

Type: Union(Expression Integer,...)

```
--S 16
```

```
bb:=tan(a*x)/a
```

```
--R
```

```
--R      tan(a x)
```

```
--R (2) -----
```

```
--R      a
```

```
--R
```

```
--E
```

Type: Expression Integer

```
--S 17
```

```
cc:=aa-bb
```

```
--R
```

```
--R      - cos(a x)tan(a x) + sin(a x)
```

```
--R (3) -----
```

```
--R      a cos(a x)
```

```
--R
```

```
--E
```

Type: Expression Integer

```
--S 18
```

```
tanrule:=rule(tan(a) == sin(a)/cos(a))
```

```
--R
```

```
--R      sin(a)
```

```
--R (4) tan(a) == -----
```

```
--R      cos(a)
```

```
--R
```

```
--E
```

Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)

```
--S 19      14:452 Schaums and Axiom agree
```



```
dd:=tanrule cc
--R
--R (5)  0
--R
--E
```

Type: Expression Integer

3 [1]:14.453 $\int \sec^3 ax \, dx$

$$\int \sec^3 ax = \frac{\sec ax \tan ax}{2a} + \frac{1}{2a} \ln(\sec ax + \tan ax)$$

```

(*)+≡
)clear all

--S 20
aa:=integrate(sec(a*x)^3,x)
--R
--R
--R (1)
--R      2      sin(a x) + cos(a x) + 1
--R      cos(a x) log(-----)
--R                      cos(a x) + 1
--R      +
--R      2      sin(a x) - cos(a x) - 1
--R      - cos(a x) log(-----) + sin(a x)
--R                      cos(a x) + 1
--R      /
--R      2
--R      2a cos(a x)
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

--S 21
bb:=(sec(a*x)*tan(a*x))/(2*a)+1/(2*a)*log(sec(a*x)+tan(a*x))
--R
--R      log(tan(a x) + sec(a x)) + sec(a x)tan(a x)
--R (2) -----
--R                      2a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

--S 22
cc:=aa-bb
--R
--R (3)
--R      2
--R      - cos(a x) log(tan(a x) + sec(a x))
--R      +
--R      2      sin(a x) + cos(a x) + 1
--R      cos(a x) log(-----)
--R                      cos(a x) + 1
--R      +

```

```

--R          2      sin(a x) - cos(a x) - 1          2
--R      - cos(a x) log(-----) - cos(a x) sec(a x)tan(a x)
--R                               cos(a x) + 1
--R      +
--R      sin(a x)
--R      /
--R          2
--R      2a cos(a x)
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 23
tanrule:=rule(tan(a) == sin(a)/cos(a))
--R
--R          sin(a)
--R      (4) tan(a) == -----
--R          cos(a)
--R
--R                                          Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

```

```

--S 24
dd:=tanrule cc
--R
--R      (5)
--R          2      sin(a x) + cos(a x)sec(a x)
--R      - cos(a x) log(-----)
--R                               cos(a x)
--R      +
--R          2      sin(a x) + cos(a x) + 1
--R      cos(a x) log(-----)
--R                               cos(a x) + 1
--R      +
--R          2      sin(a x) - cos(a x) - 1
--R      - cos(a x) log(-----) + (- cos(a x)sec(a x) + 1)sin(a x)
--R                               cos(a x) + 1
--R      /
--R          2
--R      2a cos(a x)
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 25
secrule:=rule(sec(a) == 1/cos(a))
--R
--R          1
--R      (6) sec(a) == -----

```

```

--R          cos(a)
--R          Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

```

```

--S 26
ee:=secrete dd
--R
--R (7)
--R          sin(a x) + 1      sin(a x) + cos(a x) + 1
--R      - log(-----) + log(-----)
--R          cos(a x)          cos(a x) + 1
--R
--R      +
--R          sin(a x) - cos(a x) - 1
--R      - log(-----)
--R          cos(a x) + 1
--R
--R /
--R      2a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 27
ff:=expandLog ee
--R
--R (8)
--R      log(sin(a x) + cos(a x) + 1) - log(sin(a x) + 1)
--R      +
--R      - log(sin(a x) - cos(a x) - 1) + log(cos(a x))
--R
--R /
--R      2a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 28      14:453 Schaums and Axiom differ by a constant
gg:=complexNormalize ff
--R
--R          log(- 1)
--R (9) -----
--R          2a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

4 [1]:14.454 $\int \sec^n ax \tan ax \, dx$

$$\int \sec^n ax \tan ax = \frac{\sec^n ax}{na}$$

```
(*)+=
)clear all
```

```
--S 29
aa:=integrate(sec(a*x)^n*tan(a*x),x)
```

```
--R
--R
--R          1
--R      n log(-----)
--R                2
--R          cos(a x)
--R      -----
--R                2
--R      %e
--R (1) -----
--R          a n
```

Type: Union(Expression Integer,...)

```
--S 30
bb:=sec(a*x)^n/(n*a)
```

```
--R
--R          n
--R      sec(a x)
--R (2) -----
--R          a n
```

Type: Expression Integer

```
--S 31
cc:=aa-bb
```

```
--R
--R          1
--R      n log(-----)
--R                2
--R          cos(a x)
--R      -----
--R                2
--R      %e
--R (3) ----- - sec(a x)^n
--R                a n
```

Type: Expression Integer

--E

--S 32 14:454 Schaums and Axiom agree

normalize cc

--R

--R (4) 0

--R

Type: Expression Integer

--E

5 [1]:14.455

$$\int \frac{dx}{\sec ax} dx$$

$$\int \frac{1}{\sec ax} = \frac{\sin ax}{a}$$

<*)+=

)clear all

--S 33

aa:=integrate(1/sec(a*x),x)

--R

--R

--R sin(a x)

--R (1) -----

--R a

--R

Type: Union(Expression Integer,...)

--E

--S 34

bb:=sin(a*x)/a

--R

--R sin(a x)

--R (2) -----

--R a

--R

Type: Expression Integer

--E

--S 35 14:455 Schaums and Axiom agree

cc:=aa-bb

--R

--R (3) 0

--R

Type: Expression Integer

--E

6 [1]:14.456 $\int x \sec ax \, dx$

$$\int x \sec ax = \frac{1}{a^2} \left\{ \frac{(ax)^2}{2} + \frac{(ax)^4}{8} + \frac{5(ax)^6}{144} + \dots + \frac{E_n(ax)^{2n+2}}{(2n+2)(2n)!} + \dots \right\}$$

`<*>+≡
)clear all`

--S 36 14:456 Axiom cannot compute this integral

aa:=integrate(x*sec(a*x),x)

--R

--R

--R x

--R ++

--I (1) | %N sec(%N a)d%N

--R ++

--R

Type: Union(Expression Integer,...)

--E

7 [1]:14.457 $\int \frac{\sec ax}{x} \, dx$

$$\int \frac{\sec ax}{x} = \ln x + \frac{(ax)^2}{4} + \frac{5(ax)^4}{96} + \frac{61(ax)^6}{4320} + \dots + \frac{E_n(ax)^{2n}}{(2n)(2n)!} + \dots$$

`<*>+≡
)clear all`

--S 37 14:457 Axiom cannot compute this integral

aa:=integrate(sec(a*x)/x,x)

--R

--R

--R x

--I ++ sec(%N a)

--I (1) | ----- d%N

--I ++ %N

--R

Type: Union(Expression Integer,...)

--E

8 [1]:14.458 $\int x \sec^2 ax \, dx$

$$\int x \sec^2 ax = \frac{x}{a} \tan ax + \frac{1}{a^2} \ln \cos ax$$

```

(*)+≡
)clear all

--S 38
aa:=integrate(x*sec(a*x)^2,x)
--R
--R
--R (1)
--R
--R          2
--R          cos(a x)log(-----) + cos(a x)log(-----) + a x sin(a x)
--R          cos(a x) + 1          cos(a x) + 1
--R -----
--R
--R          2
--R          a cos(a x)
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

--S 39
bb:=x/a*tan(a*x)+1/a^2*log(cos(a*x))
--R
--R
--R          log(cos(a x)) + a x tan(a x)
--R (2) -----
--R          2
--R          a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

--S 40
cc:=aa-bb
--R
--R
--R (3)
--R
--R          2
--R          - cos(a x)log(cos(a x)) - cos(a x)log(-----)
--R          cos(a x) + 1
--R
--R +
--R          2cos(a x)
--R          cos(a x)log(-----) - a x cos(a x)tan(a x) + a x sin(a x)
--R          cos(a x) + 1
--R
--R /
--R
--R          2
--R          a cos(a x)

```



```
--R                                                    Type: Expression Integer
--E
```

```
--S 41
tanrule:=rule(tan(a) == sin(a)/cos(a))
```

```
--R
--R          sin(a)
--R (4) tan(a) == -----
--R          cos(a)
--R                                     Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E
```

```
--S 42
dd:=tanrule cc
```

```
--R
--R          2          2cos(a x)
--R - log(cos(a x)) - log(-----) + log(-----)
--R                   cos(a x) + 1    cos(a x) + 1
--R (5) -----
--R                   2
--R                  a
--R                                                    Type: Expression Integer
--E
```

```
--S 43      14:458 Schaums and Axiom differ by a constant
ee:=expandLog dd
```

```
--R
--R - log(2) + log(- 2)
--R (6) -----
--R          2
--R         a
--R                                                    Type: Expression Integer
--E
```

9 [1]:14.459 $\int \frac{dx}{q + p \sec ax} dx$

$$\int \frac{1}{q + p \sec ax} = \frac{x}{q} - \frac{p}{q} \int \frac{dx}{p + q \cos ax}$$

```

(*)+≡
)clear all

--S 44
aa:=integrate(1/(q+p*sec(a*x)),x)
--R
--R
--R (1)
--R
--R          +-----+
--R          | 2    2    2    2          +-----+
--R      (- p cos(a x) - q)\|q - p  + (q - p)sin(a x)  | 2    2
--R      p log(-----) + a x\|q - p
--R          q cos(a x) + p
--R
--R      [-----,
--R
--R          +-----+
--R          | 2    2
--R          a q\|q - p
--R
--R      +-----+
--R      | 2    2          +-----+
--R      sin(a x)\|- q + p  | 2    2
--R      - 2p atan(-----) + a x\|- q + p
--R          (q + p)cos(a x) + q + p
--R
--R      -----]
--R
--R          +-----+
--R          | 2    2
--R          a q\|- q + p
--R
--R                                          Type: Union(List Expression Integer,...)
--E

```

```

--S 45
t1:=integrate(1/(p+q*cos(a*x)),x)
--R
--R (2)
--R
--R          +-----+
--R          | 2    2    2    2
--R      (- p cos(a x) - q)\|q - p  + (- q + p)sin(a x)
--R      log(-----)
--R          q cos(a x) + p
--R
--R      [-----,
--R
--R          +-----+

```

```

--R          | 2  2
--R          a\|q  - p
--R          +-----+
--R          | 2  2
--R          sin(a x)\|- q  + p
--R          2atan(-----)
--R          (q + p)cos(a x) + q + p
--R          -----]
--R          +-----+
--R          | 2  2
--R          a\|- q  + p
--R
--R                                          Type: Union(List Expression Integer,...)
--E

```

```

--S 46
bb1:=x/q-p/q*t1.1

```

```

--R
--R (3)
--R          +-----+
--R          | 2  2      2  2      +-----+
--R          (- p cos(a x) - q)\|q  - p  + (- q  + p )sin(a x)      | 2  2
--R          - p log(-----) + a x\|q  - p
--R          q cos(a x) + p
--R          -----
--R          +-----+
--R          | 2  2
--R          a q\|q  - p
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 47
bb2:=x/q-p/q*t1.2

```

```

--R
--R          +-----+
--R          | 2  2      +-----+
--R          sin(a x)\|- q  + p      | 2  2
--R          - 2p atan(-----) + a x\|- q  + p
--R          (q + p)cos(a x) + q + p
--R (4) -----
--R          +-----+
--R          | 2  2
--R          a q\|- q  + p
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 48

```

```

cc1:=aa.1-bb1
--R
--R (5)
--R
--R          +-----+
--R          | 2 2      2 2
--R      (- p cos(a x) - q)\|q - p  + (q - p )sin(a x)
--R      p log(-----)
--R          q cos(a x) + p
--R
--R      +
--R          +-----+
--R          | 2 2      2 2
--R      (- p cos(a x) - q)\|q - p  + (- q + p )sin(a x)
--R      p log(-----)
--R          q cos(a x) + p
--R
--R      /
--R          +-----+
--R          | 2 2
--R      a q\|q - p
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 49
cc2:=aa.1-bb2
--R
--R (6)
--R
--R          +-----+
--R          | 2 2      2 2
--R      (- p cos(a x) - q)\|q - p  + (q - p )sin(a x)
--R      p\|- q + p log(-----)
--R          q cos(a x) + p
--R
--R      +
--R          +-----+
--R          | 2 2      sin(a x)\|- q + p
--R      2p\|q - p atan(-----)
--R          (q + p)cos(a x) + q + p
--R
--R      /
--R          +-----+ +-----+
--R          | 2 2      | 2 2
--R      a q\|- q + p \|q - p
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 50
cc3:=aa.2-bb1
--R

```


10 [1]:14.460 $\int \sec^n ax \, dx$

$$\int \sec^n ax = \frac{\sec^{n-2} ax \tan ax}{a(n-1)} + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2} ax$$

<*)+≡

)clear all

--S 52 14:460 Axiom cannot compute this integral

aa:=integrate(sec(a*x)^n,x)

--R

--R

--R x

--R ++ n

--I (1) | sec(%N a) d%N

--R ++

--R

Type: Union(Expression Integer,...)

--E

)spool

)lisp (bye)

References

- [1] Spiegel, Murray R. *Mathematical Handbook of Formulas and Tables*
Schaum's Outline Series McGraw-Hill 1968 pp81-82