

\$SPAD/input schaum16.input

Timothy Daly

June 15, 2008

Contents

1	[1]:14.325	$\int \frac{dx}{x(x^n + a^n)}$	3
2	[1]:14.326	$\int \frac{x^{n-1} dx}{x^n + a^n}$	5
3	[1]:14.327	$\int \frac{x^m dx}{(x^n + a^n)^r}$	6
4	[1]:14.328	$\int \frac{dx}{x^m(x^n + a^n)^r}$	7
5	[1]:14.329	$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^n + a^n}}$	8
6	[1]:14.330	$\int \frac{dx}{x(x^n - a^n)}$	12
7	[1]:14.331	$\int \frac{x^{n-1} dx}{x^n - a^n}$	15
8	[1]:14.332	$\int \frac{x^m dx}{(x^n - a^n)^r}$	16
9	[1]:14.333	$\int \frac{dx}{x^m(x^n - a^n)^r}$	17
10	[1]:14.334	$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^n - a^n}}$	18
11	[1]:14.335	$\int \frac{x^{p-1} dx}{x^{2m} + a^{2m}}$ provided $0 < p \leq 2m$	20
12	[1]:14.336	$\int \frac{x^{p-1} dx}{x^{2m} - a^{2m}}$ provided $0 < p \leq 2m$	21
13	[1]:14.337	$\int \frac{x^{p-1} dx}{x^{2m+1} + a^{2m+1}}$ provided $0 < p \leq 2m + 1$	22
14	[1]:14.338	$\int \frac{x^{p-1} dx}{x^{2m+1} - a^{2m+1}}$ provided $0 < p \leq 2m + 1$	23

1 [1]:14.325

$$\int \frac{dx}{x(x^n + a^n)}$$

$$\int \frac{1}{x(x^n + a^n)} = \frac{1}{na^n} \ln \frac{x^n}{x^n + a^n}$$

<*)≡

```
)spool schaum16.output
)set message test on
)set message auto off
)clear all
```

--S 1

```
aa:=integrate(1/(x*(x^n+a^n)),x)
```

```
--R
--R          n log(x)      n
--R      - log(%e      + a ) + n log(x)
--R (1) -----
--R                      n
--R                   n a
```

Type: Union(Expression Integer,...)

--E

--S 2

```
bb:=1/(n*a^n)*log(x^n/(x^n+a^n))
```

```
--R
--R          n
--R         x
--R      log(-----)
--R          n  n
--R         x  + a
--R (2) -----
--R          n
--R         n a
```

Type: Expression Integer

--E

--S 3

```
cc:=aa-bb
```

```
--R
--R          n          n          n
--R      - log(%e      + a ) - log(-----) + n log(x)
--R                                n  n
--R                               x  + a
--R (3) -----
```

```

--R
--R
--R      n
--R      n a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 4
dd:=expandLog cc
--R
--R      n log(x)      n      n      n      n
--R      - log(%e      + a ) + log(x  + a ) - log(x ) + n log(x)
--R  (4) -----
--R
--R      n
--R      n a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 5      14:325 Schaums and Axiom agree
ee:=complexNormalize dd
--R
--R  (5)  0
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

2 [1]:14.326 $\int \frac{x^{n-1} dx}{x^n + a^n}$

$$\int \frac{x^{n-1}}{x^n + a^n} = \frac{1}{n} \ln(x^n + a^n)$$

```
(*)+=
)clear all
```

```
--S 8
aa:=integrate(x^(n-1)/(x^n+a^n),x)
```

```
--R
--R
--R          n log(x)      n
--R      log(%e      + a )
--R (1) -----
--R          n
```

Type: Union(Expression Integer,...)

```
--E
```

```
--S 9
bb:=1/n*log(x^n+a^n)
```

```
--R
--R          n      n
--R      log(x  + a )
--R (2) -----
--R          n
```

Type: Expression Integer

```
--E
```

```
--S 10
cc:=aa-bb
```

```
--R
--R          n log(x)      n          n      n
--R      log(%e      + a ) - log(x  + a )
--R (3) -----
--R          n
```

Type: Expression Integer

```
--E
```

```
--S 11
explog:=rule(%e^(n*log(x)) == x^n)
```

```
--R
--R          n log(x)      n
--R (4) %e      == x
--R
--R                                     Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
```

--E

--S 12 14:326 Schaums and Axiom agree

dd:=explog cc

--R

--R (5) 0

--R

Type: Expression Integer

--E

3 [1]:14.327
$$\int \frac{x^m dx}{(x^n + a^n)^r}$$

$$\int \frac{x^m}{(x^n + a^n)^r} = \int \frac{x^{m-n}}{(x^n + a^n)^{r-1}} - a^n \int \frac{x^{m-n}}{(x^n + a^n)^r}$$

<*)+≡

)clear all

--S 13 14:327 Axiom cannot compute this integral

aa:=integrate(x^m/(x^n+a^n)^r,x)

--R

--R

--R

--I

--I (1) | $\frac{x^m}{(a + x^n)^r} d\%J$

--R

--I

--R

--E

Type: Union(Expression Integer,...)

4 [1]:14.328 $\int \frac{dx}{x^m(x^n + a^n)^r}$

$$\int \frac{1}{x^m(x^n + a^n)^r} = \frac{1}{a^n} \int \frac{1}{x^m(x^n + a^n)^{r-1}} - \frac{1}{a^n} \int \frac{1}{x^{m-n}(x^n + a^n)^r}$$

<*)+=

)clear all

--S 14 14:328 Axiom cannot compute this integral

aa:=integrate(1/(x^m*(x^n+a^n)^r),x)

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

$$(1) \quad \int \frac{x}{(x^m + a^n)^r} dx = \frac{1}{(m-n)r} (x^m + a^n)^{-r+1} - \frac{1}{(m-n)r} \int \frac{1}{(x^m + a^n)^r} dx$$

Type: Union(Expression Integer,...)

5 [1]:14.329 $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^n + a^n}}$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^n + a^n}} = \frac{1}{n\sqrt{a^n}} \ln\left(\frac{\sqrt{x^n + a^n} - \sqrt{a^n}}{\sqrt{x^n + a^n} + \sqrt{a^n}}\right)$$

`<*>+≡
)clear all`

`--S 15`

`aa:=integrate(1/(x*sqrt(x^n+a^n)),x)`

`--R`

`--R`

`--R (1)`

$$\log\left(\frac{-2a \sqrt[n]{e} + a + (e^{n \log(x)} + 2a) \sqrt[n]{a}}{e^{n \log(x)} \sqrt[n]{a}}\right),$$

$$\left[\frac{2 \operatorname{atan}\left(\frac{\sqrt[n]{-a} \sqrt[n]{e} + a}{a}\right)}{n \sqrt[n]{-a}} \right]$$

Type: Union(List Expression Integer,...)

`--E`

`--S 16`

`bb:=1/(n*sqrt(a^n))*log((sqrt(x^n+a^n)-sqrt(a^n))/(sqrt(x^n+a^n)+sqrt(a^n)))`

`--R`

`--R`

`--R`

`--R`

`--R`

`--R`

`--R`


```

--R          \|x + a + \|a
--R (2) -----
--R          +---+
--R          | n
--R          n\|a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 17
cc1:=aa.1-bb

```

```

--R (3)
--R          +-----+
--R          n | n log(x)  n          n log(x)  n | n
--R          - 2a \|%e      + a  + (%e      + 2a )\|a
--R          log(-----)
--R                                  n log(x)
--R                                  %e
--R
--R  +
--R          +-----+  +---+
--R          | n      n      | n
--R          \|x + a  - \|a
--R          - log(-----)
--R          +-----+  +---+
--R          | n      n      | n
--R          \|x + a  + \|a
--R
--R  /
--R          +---+
--R          | n
--R          n\|a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 18
dd1:=expandLog cc1

```

```

--R (4)
--R          +-----+
--R          n | n log(x)  n          n log(x)  n | n
--R          log(2a \|%e      + a  + (- %e      - 2a )\|a )
--R
--R  +
--R          +-----+  +---+          +-----+  +---+
--R          | n      n      | n          | n      n      | n
--R          log(\|x + a  + \|a ) - log(\|x + a  - \|a ) - n log(x) + log(- 1)
--R
--R  /
--R          +---+

```

```

--R      | n
--R      n\|a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 19
explog:=rule(%e^(n*log(x)) == x^n)
--R
--R      n log(x)      n
--R      (5) %e      == x
--R
--R                                          Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

```

```

--S 20
ee1:=explog dd1
--R
--R      (6)
--R      +-----+      +---+      +-----+      +---+
--R      n | n      n      n      n | n      | n      n      | n
--R      log(2a \|x + a + (- x - 2a)\|a ) + log(\|x + a + \|a )
--R      +
--R      +-----+      +---+
--R      | n      n      | n
--R      - log(\|x + a - \|a ) - n log(x) + log(- 1)
--R      /
--R      +---+
--R      | n
--R      n\|a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 21
ff1:=complexNormalize ee1
--R
--R      n log(a) + 4log(- 1)
--R      (7) -----
--R      +-----+
--R      | n log(a)
--R      2n\|e
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 22      14:329 Schaums and Axiom differ by a constant
gg1:=explog ff1
--R
--R      n log(a) + 4log(- 1)

```

```

--R (8) -----
--R          +--+
--R          | n
--R        2n\|a
--R
--E

```

Type: Expression Integer

6 [1]:14.330 $\int \frac{dx}{x(x^n - a^n)}$

$$\int \frac{1}{x(x^n - a^n)} = \frac{1}{na^n} \ln\left(\frac{x^n - a^n}{x^n}\right)$$

```
(*)+≡
)clear all
```

```
--S 23
aa:=integrate(1/(x*(x^n-a^n)),x)
```

```
--R
--R
--R          n log(x)      n
--R      log(%e      - a ) - n log(x)
--R (1) -----
--R                    n
--R                 n a
```

Type: Union(Expression Integer,...)

```
--S 24
bb:=1/(n*a^n)*log((x^n-a^n)/x^n)
```

```
--R
--R          n      n
--R         x  - a
--R      log(-----)
--R            n
--R           x
--R (2) -----
--R            n
--R         n a
```

Type: Expression Integer

```
--S 25
cc:=aa-bb
```

```
--R
--R
--R          n      n          n      n
--R      n log(x)      - a ) - log(-----) - n log(x)
--R      log(%e      - a ) - log(-----) - n log(x)
--R                                     n
--R                                    x
--R (3) -----
--R                                     n
--R                                    n a
```

--R Type: Expression Integer
 --E

--S 26

dd:=expandLog cc

--R

$$(4) \frac{\log(e^{n \log(x) - a}) + \log(x^n) - \log(x^n - a^n) - n \log(x)}{n a^n}$$

--R

Type: Expression Integer

--E

--S 27

explog:=rule(%e^(n*log(x)) == x^n)

--R

$$(5) e^{n \log(x)} == x^n$$

--R Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)

--E

--S 28

ee:=explog dd

--R

$$(6) \frac{\log(x^n) - n \log(x)}{n a^n}$$

--R

Type: Expression Integer

--E

--S 29

logpow:=rule(log(a^n) == n*log(a))

--R

$$(7) \log(a^n) == n \log(a)$$

--R Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)

--E

--S 30 14:330 Schaums and Axiom agree

ff:=logpow ee

--R

$$(8) 0$$

--R

Type: Expression Integer

--E

7 [1]:14.331 $\int \frac{x^{n-1} dx}{x^n - a^n}$

$$\int \frac{x^{n-1}}{x^n - a^n} = \frac{1}{n} \ln(x^n - a^n)$$

```
(*)+=
)clear all
```

```
--S 31
aa:=integrate(x^(n-1)/(x^n-a^n),x)
```

```
--R
--R
--R          n log(x)      n
--R    log(%e      - a )
--R (1)  -----
--R          n
```

Type: Union(Expression Integer,...)

```
--E
```

```
--S 32
bb:=1/n*log(x^n-a^n)
```

```
--R
--R          n      n
--R    log(x  - a )
--R (2)  -----
--R          n
```

Type: Expression Integer

```
--E
```

```
--S 33
cc:=aa-bb
```

```
--R
--R          n log(x)      n          n      n
--R    log(%e      - a ) - log(x  - a )
--R (3)  -----
--R          n
```

Type: Expression Integer

```
--E
```

```
--S 34
explog:=rule(%e^(n*log(x)) == x^n)
```

```
--R
--R          n log(x)      n
--R (4)  %e      == x
--R
--R                                     Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
```

--E

--S 35 14:331 Schaums and Axiom agree

dd:=explog cc

--R

--R (5) 0

--R

Type: Expression Integer

--E

8 [1]:14.332
$$\int \frac{x^m dx}{(x^n - a^n)^r}$$

$$\int \frac{x^m}{(x^n - a^n)^r} = a^n \int \frac{x^{m-n}}{(x^n - a^n)^r} + \int \frac{x^{m-n}}{(x^n - a^n)^{r-1}}$$

<*)+≡

)clear all

--S 36 14:332 Axiom cannot compute this integral

aa:=integrate(x^m/(x^n-a^n)^r,x)

--R

--R

--R

--I

--I (1) | $\frac{x^m}{(-a + x^n)^r} dJ$

--R

--I

--R

--E

Type: Union(Expression Integer,...)

9 [1]:14.333 $\int \frac{dx}{x^m(x^n - a^n)^r}$

$$\int \frac{1}{x^m(x^n - a^n)^r} = \frac{1}{a^n} \int \frac{1}{x^{m-n}(x^n - a^n)^r} - \frac{1}{a^n} \int \frac{1}{x^m(x^n - a^n)^{r-1}}$$

```
<*)+=
)clear all
```

```
--S 37      14:333 Axiom cannot compute this integral
```

```
aa:=integrate(1/(x^m*(x^n-a^n)^r),x)
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
(1) |  $\frac{x}{x^m(x^n - a^n)^r} dx$ 
```

```
Type: Union(Expression Integer,...)
```

10 [1]:14.334 $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^n - a^n}}$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^n - a^n}} = \frac{2}{n\sqrt{a^n}} \cos^{-1} \sqrt{\frac{a^n}{x^n}}$$

```
(*)+=
)clear all
```

```
--S 38
```

```
aa:=integrate(1/(x*sqrt(x^n-a^n)),x)
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R (1)
```

```
--R      +-----+
--R      n | n log(x)      n      n log(x)      n | n
--R      2a \|%e      - a  + (%e      - 2a )\|- a
--R      log(-----)
--R      n log(x)
--R      %e
--R      [-----,
--R      +-----+
--R      | n
--R      n\|- a
--R      +---+ +-----+
--R      | n | n log(x)      n
--R      \|a \|%e      - a
--R      2atan(-----)
--R      n
--R      a
--R      -----]
--R      +---+
--R      | n
--R      n\|a
--R
--R                                          Type: Union(List Expression Integer,...)
--E
```

```
--S 39
```

```
bb:=2/(n*sqrt(a^n))*acos(sqrt(a^n/x^n))
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```

--R (2) -----
--R      +---+
--R      | n
--R      n\|a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 40
cc1:=aa.1-bb

```

```

--R (3)
--R      +-----+
--R      +---+      n | n log(x)      n      n log(x)      n | n
--R      | n      2a \|%e      - a      + (%e      - 2a )\|- a
--R      \|a log(-----)
--R                                  n log(x)
--R                                  %e
--R      +
--R      +-----+      +---+
--R      | n      | n
--R      - 2\|- a      acos( |-- )
--R                        | n
--R                        \|x
--R      /
--R      +-----+ +---+
--R      | n | n
--R      n\|- a \|a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 41      14:334 Axiom cannot simplify this expression
cc2:=aa.2-bb

```

```

--R
--R      +---+ +-----+
--R      | n | n log(x)      n      | n
--R      \|a \|%e      - a      |a
--R      2atan(-----) - 2acos( |-- )
--R                        n      | n
--R                        a      \|x
--R (4) -----
--R                        +---+
--R                        | n
--R                        n\|a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

11 [1]:14.335 $\int \frac{x^{p-1} dx}{x^{2m} + a^{2m}}$ provided $0 < p \leq 2m$

$$\int \frac{x^{p-1}}{x^{2m} + a^{2m}} = \frac{1}{ma^{2m-p}} \sum_{k=1}^m \sin \frac{(2k-1)p\pi}{2m} \tan^{-1} \left(\frac{x + a \cos((2k-1)\pi/2m)}{a \sin((2k-1)\pi/2m)} \right) - \frac{1}{2ma^{2m-p}} \sum_{k=1}^m \cos \frac{(2k-1)p\pi}{2m} \ln \left(x^2 + 2ax \cos \frac{(2k-1)\pi}{2m} + a^2 \right)$$

`<*>+≡
)clear all`

--S 42 14:335 Axiom cannot compute this integral

`aa:=integrate(x^(p-1)/(x^(2*m)+a^(2*m)),x)`

--R

--R

--R x p - 1

--I ++ %J

--I (1) | ----- d%J

--R ++ 2m 2m

--I a + %J

--R

Type: Union(Expression Integer,...)

--E

12 [1]:14.336 $\int \frac{x^{p-1} dx}{x^{2m} - a^{2m}}$ **provided** $0 < p \leq 2m$

$$\int \frac{x^{p-1}}{x^{2m} - a^{2m}} = \frac{1}{2ma^{2m-p}} \sum_{k=1}^{m-1} \cos \frac{kp\pi}{m} \ln \left(x^2 - 2ax \cos \frac{k\pi}{m} + a^2 \right) - \frac{1}{ma^{2m-p}} \sum_{k=1}^{m-1} \sin \frac{kp\pi}{m} \tan^{-1} \left(\frac{x - a \cos(k\pi/m)}{a \sin(k\pi/m)} \right) + \frac{1}{2ma^{2m-p}} (\ln(x - a) + (-1)^p \ln(x + a))$$

`<*)+=`
`)clear all`

--S 43 14:336 Axiom cannot compute this integral

aa:=integrate(x^(p-1)/(x^(2*m)-a^(2*m)),x)

--R

--R

--R x p - 1
 --I ++ %J
 --I (1) | - ----- d%J
 --R ++ 2m 2m
 --I a - %J

Type: Union(Expression Integer,...)

--E

13 [1]:14.337 $\int \frac{x^{p-1} dx}{x^{2m+1} + a^{2m+1}}$ **provided** $0 < p \leq 2m + 1$

$$\int \frac{x^{p-1}}{x^{2m+1} + a^{2m+1}} =$$

$$\frac{2(-1)^{p-1}}{(2m+1)a^{2m-p+1}} \sum_{k=1}^m \sin \frac{2kp\pi}{2m+1} \tan^{-1} \left(\frac{x + a \cos(2k\pi/(2m+1))}{a \sin(2k\pi/(2m+1))} \right)$$

$$- \frac{(-1)^{p-1}}{(2m+1)a^{2m-p+1}} \sum_{k=1}^m \cos \frac{2kp\pi}{2m+1} \ln \left(x^2 + 2ax \cos \frac{2k\pi}{2m+1} + a^2 \right)$$

$$+ \frac{(-1)^{p-1} \ln(x+a)}{(2m+1)a^{2m-p+1}}$$

`<*)+≡`

`)clear all`

`--S 44 14:337 Axiom cannot compute this integral`

`aa:=integrate(x^(p-1)/(x^(2*m+1)+a^(2*m+1)),x)`

`--R`

`--R`

`--R`

`--I`

`--I`

`--R`

`--I`

`--R`

`--E`

$$(1) \quad \int \frac{x^{p-1}}{a^{2m+1} + x^{2m+1}} dx$$

Type: Union(Expression Integer,...)

14 [1]:14.338 $\int \frac{x^{p-1} dx}{x^{2m+1} - a^{2m+1}}$ provided $0 < p \leq 2m + 1$

$$\int \frac{x^{p-1}}{x^{2m+1} - a^{2m+1}} = \frac{2}{(2m+1)a^{2m-p+1}} \sum_{k=1}^m \sin \frac{2kp\pi}{2m+1} \tan^{-1} \left(\frac{x - a \cos(2kp\pi/(2m+1))}{a \sin(2k\pi/(2m+1))} \right) + \frac{1}{(2m+1)a^{2m-p+1}} \sum_{k=1}^m \cos \frac{2kp\pi}{2m+1} \ln \left(x^2 - 2ax \cos \frac{2k\pi}{2m+1} + a^2 \right) + \frac{\ln(x-a)}{(2m+1)a^{2m-p+1}}$$

`<*)+=`
`)clear all`

--S 45 14:338 Axiom cannot compute this integral

`aa:=integrate(x^(p-1)/(x^(2*m+1)-a^(2*m+1)),x)`

--R

--R

```
--R      x      p - 1
--I      ++      %J
--I (1) | - ----- d%J
--R      ++      2m + 1      2m + 1
--I      a      - %J
```

Type: Union(Expression Integer,...)

--E

`)spool`

`)lisp (bye)`

References

- [1] Spiegel, Murray R. *Mathematical Handbook of Formulas and Tables*
Schaum's Outline Series McGraw-Hill 1968 pp74-75